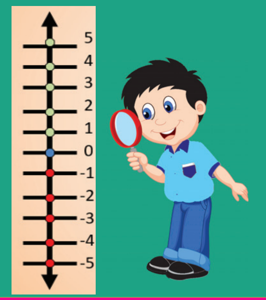
Chapter

1

INTEGERS



Learning Outcomes

The learner is able to

- understand the process of multiplication and division of integers.
- solve the problems related to multiplication and division of integers.
- verify and explain the properties of integers.
- solve the real-life problems related to integers.
- simplify and solve the numerical expressions by using BODMAS rule.

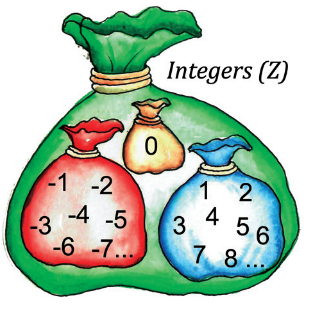
Content Items

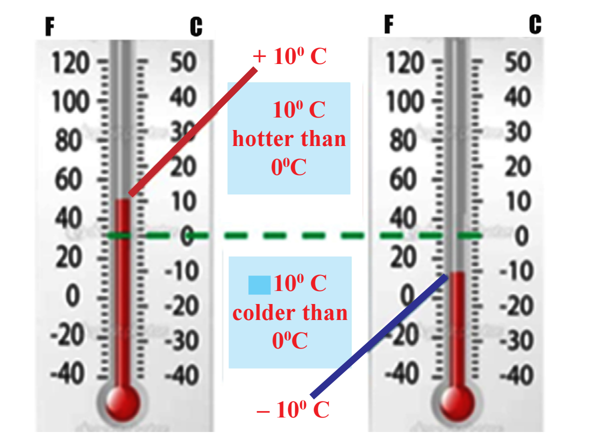
1.0 Introduction
1.1 Multiplication of integers
1.2 Division of integers
1.3 Properties of integers
1.4 BODMAS rule

U1W9M5

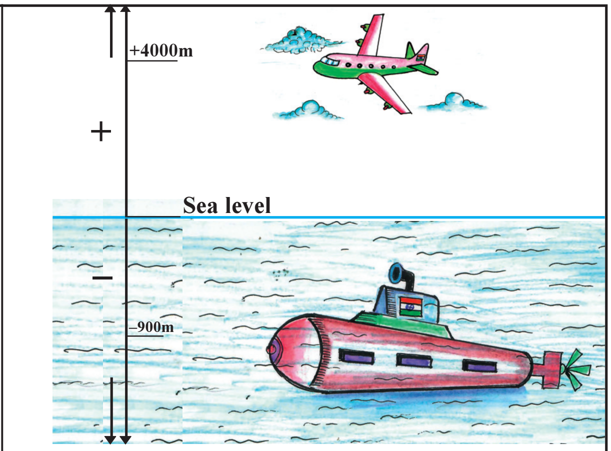
1.0 Introduction :

We have learnt the ordering of integers, addition and subtraction of integers in the previous class. We know that ***the collection of natural numbers {1,2,3,4,5...}, zero {0} and negative numbers {-1, -2, -3, -4, -5...} are Integers.*** We use the letter 'Z' to represent integers.There are several situations in our daily life where we use integers. Look at the following situations and explain your observations regarding integers.





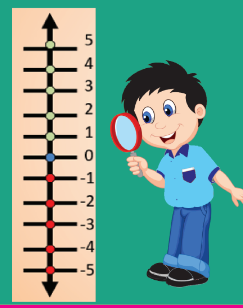
Temperature above 0^0C is positive
Temperature below 0^0C is negative



Height above the sea level is positive
Depth below the sea level is negative

అధ్యాయం

1 పూర్ణసంఖ్యలు



అభ్యసన ఫలితాలు

అభ్యాసకుడు,

- పూర్ణసంఖ్యల గుణకారం మరియు భాగహారాలను చేసే విధానాన్ని అవగాహన చేసుకుంటాడు.
- పూర్ణసంఖ్యల గుణకారం మరియు భాగహారాలకు సంబంధించిన సమస్యలు సాధిస్తాడు.
- పూర్ణసంఖ్యల ధర్మాలను సరి చూడగలడు మరియు వివరించగలడు.
- పూర్ణసంఖ్యలకు సంబంధించిన నిత్యజీవిత సమస్యలను సాధిస్తాడు.
- సంఖ్యా సమాసాలను BODMAS నియమం ఆధారంగా సూక్ష్మీకరిస్తాడు.

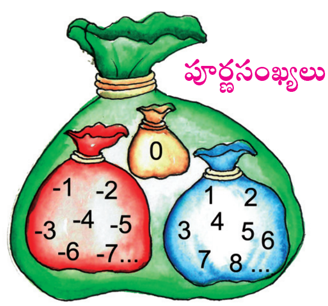
విషయాంశాలు

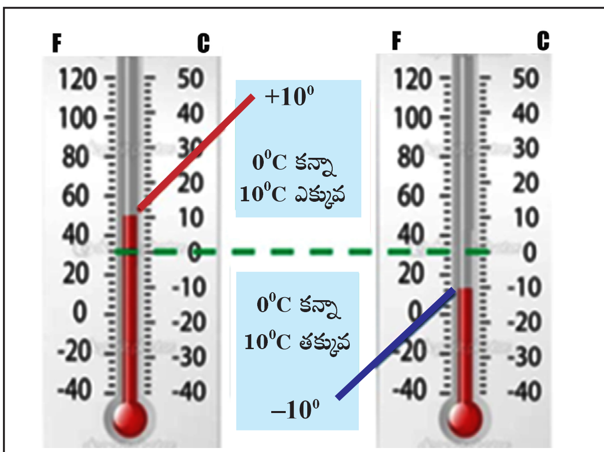
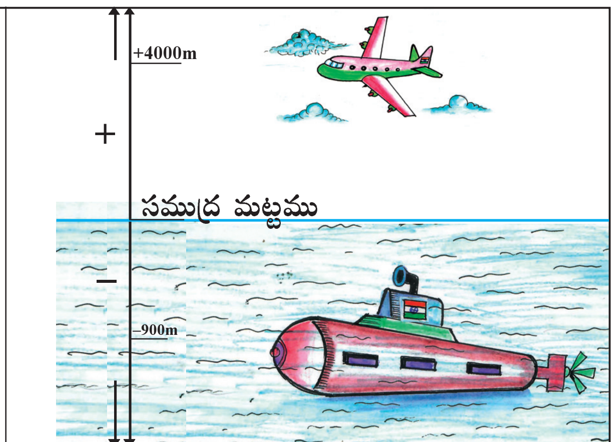
1.0 పరిచయము
1.1 పూర్ణసంఖ్యల గుణకారం
1.2 పూర్ణసంఖ్యల భాగాహారం
1.3 పూర్ణసంఖ్యల ధర్మాలు
1.4 BODMAS నియమం

S3J7L2

1.0 పరిచయము :

పూర్ణసంఖ్యల క్రమం, సంకలనం మరియు వ్యవకలనంలను ముందు తరగతిలో నేర్చుకున్నాము. **సహజ సంఖ్యలు** *{1,2,3,4,5...}*, **సున్నా** *{0}* **మరియు ఋణసంఖ్యలను** *{-1, -2, -3, -4, -5...}* **కలిపి పూర్ణసంఖ్యలు** అంటారని తెలుసుకున్నాము. పూర్ణసంఖ్యలను సూచించటకు 'Z' అనే అక్షరం ఉపయోగిస్తారు. మన దైనందిన జీవితంలో మనం పూర్ణాంకాలను వివిధ సందర్భాలలో ఉపయోగిస్తాము. క్రింది సందర్భాలను గమనించి పూర్ణసంఖ్యల గురించి మీ పరిశీలనలను వివరించుము.



	
ఉష్ణోగ్రత 0°C కంటే ఎక్కువ ఉంటే ధనాత్మకం ఉష్ణోగ్రత 0°C కంటే తక్కువ ఉంటే ఋణాత్మకం.	సముద్రమట్టము నుండి ఎత్తులో ఉంటే ధనాత్మకం సముద్రమట్టము నుండి లోతులో ఉంటే ఋణాత్మకం

In this class we will learn multiplication, division of integers and properties of integers. Let us recall what we have learnt in the previous class through following exercise.

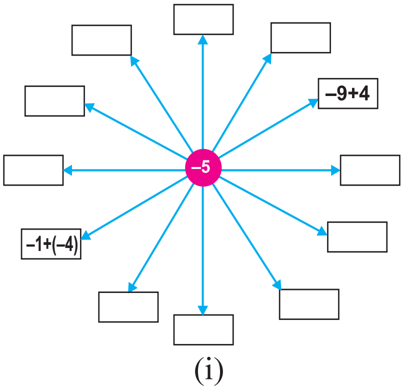
Review Exercise

1. Represent the following statements with suitable integer.
   i) Sneha deposited ₹2000 in her savings account.
   ii) A submarine is in the depth of 350 feet in the sea level.
   iii) The height of Mount Everest is 8848 m above the sea level.
   iv) Temperature of 14 degrees below 0^0 C.
2. Fill the missing integers on the number line.

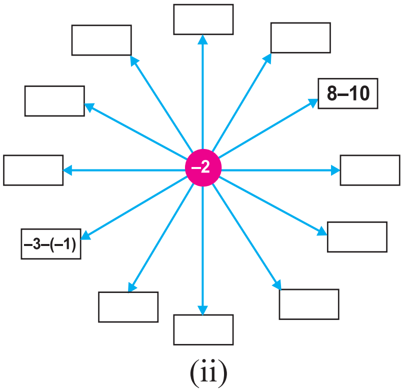
3. Represent the following additions and subtractions on number line.
   i) 7 + 4 ii) –8 + 3 iii) 9 – 11 iv) 13 – 5
4. Write the following integers in descending order and ascending order.
   i) –9, –1, 0, –10, –6 ii) –6, 6, –9, 5, 10, –3 iii) –15, –20, –35, 0, 2
5. Calculate the following.
   i) –2 + 3 ii) –6 + (–2) iii) 8 – (–6)
   iv) –9 + 4 v) –23 – (–30) vi) 50 – 153
   vii) 71 + (–10) –8 viii) –30 + 58 –38

6. The temperature in Siachen at 5 a.m. was 10 degrees below 0^0C. Six hours later, it had increased to 14^0C. What is the temperature at 11 a.m.?

7. A fish was at 16 feet below the surface of sea and went down another 17 feet. What is its position now from the surface of sea?
8. A green grocer had a profit of ₹250 on Monday, a loss of ₹120 on Tuesday and loss of ₹180 on Wednesday. Find total profit or loss after 3 days?
9. Fill the boxes in first diagram by doing addition of two integers and in second diagram by doing subtraction of two integers.



(i)



(ii)

ఈ తరగతి నందు పూర్ణసంఖ్యల యొక్క గుణకారం, భాగహారం మరియు వాటి ధర్మాలను గురించి మనం తెలుసుకుందాం. ముందుగా క్రింది తరగతిలో నేర్చుకున్న అంశాలను క్రింది అభ్యాసం ఆధారంగా మనం పునర్విమర్శ చేసుకుందాం.

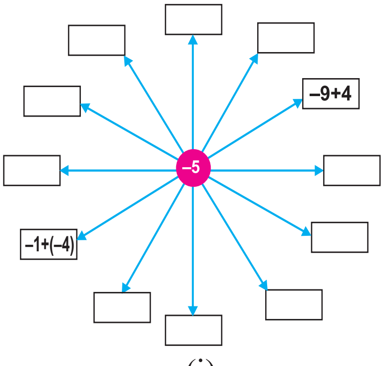
పునర్విమర్శ అభ్యాసం

1. క్రింది వాక్యాలను సరైన పూర్ణసంఖ్య ఉపయోగించి రాయండి.
   i) స్నేహ తన పొదుపు ఖాతాలో ₹2000 జమ చేసినది.
   ii) జలాంతర్గామి సముద్ర మట్టము నుండి 350 అడుగుల లోతులో ఉంది.
   iii) ఎవరెస్టు శిఖరం సముద్ర మట్టము నుండి 8848 మీటర్ల ఎత్తులో ఉంది.
   iv) 0^0 C కన్నా 14 డిగ్రీల తక్కువ ఉష్ణోగ్రత ఉంది.
2. క్రింది సంఖ్య రేఖపై లేని పూర్ణసంఖ్యలను గుర్తించండి.

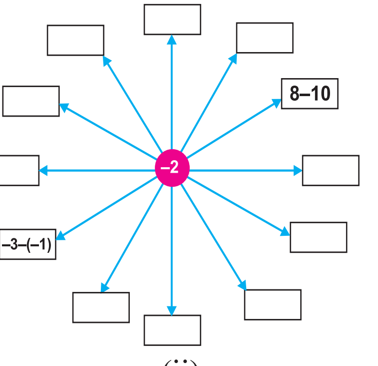
3. క్రింది పూర్ణసంఖ్యల సంకలనము, వ్యవకలనములను సంఖ్యారేఖపై సూచించండి.
   i) $7 + 4$ ii) $-8 + 3$ iii) $9 - 11$ iv) $13 - 5$
4. క్రింది పూర్ణసంఖ్యలను అవరోహణ మరియు ఆరోహణ క్రమంలో రాయండి.
   i) –9, –1, 0, –10, –6 ii) –6, 6, –9, 5, 10, –3 iii) –15,–20, –35, 0, 2
5. క్రింది వాటిని లెక్కించుము.
   i) $-2 + 3$ ii) $-6 + (-2)$ iii) $8 - (-6)$
   iv) $-9 + 4$ v) $-23 - (-30)$ vi) $50 - 153$
   vii) $71 + (-10) - 8$ viii) $-30 + 58 - 38$

6. సియాచిన్ వద్ద ఉదయం ఐదు గంటలకు ఉష్ణోగ్రత 0^0C కన్నా 10^0C తక్కువ ఉంది. ఆరు గంటల తర్వాత అది 14^0C పెరిగినది. అయిన ఉదయం 11 గంటలకు ఉష్ణోగ్రత ఎంత ఉంటుంది?

7. ఒక చేప సముద్ర ఉపరితలం నుండి 16 అడుగుల లోతులో ఉండి, మరలా 17 అడుగుల కిందకు వెళ్ళింది. ప్రస్తుతం సముద్ర మట్టం నుండి చేప స్థానం ఏమిటి?
8. ఒక ఆకు కూరల వ్యాపారి సోమవారం నాడు ₹250 లాభం, మంగళవారం నాడు ₹120 నష్టం మరియు బుధవారం నాడు ₹180 నష్టం పొందాడు. మూడు రోజుల తరువాత అతనికి వచ్చిన మొత్తం లాభం లేదా నష్టం ఎంత?
9. పక్క పటాలలో పెట్టెలను మొదటి పటంలో రెండు పూర్ణసంఖ్యల యొక్క సంకలనం ఆధారంగా మరియు రెండో పటంలో రెండు పూర్ణసంఖ్యల వ్యవకలనం ఆధారంగా పూర్తిచేయుము.



(i)



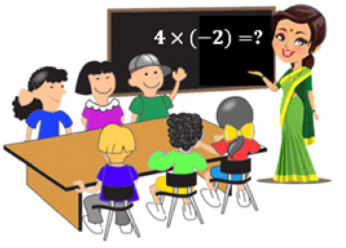
(ii)

Let us learn the multiplication of integers.

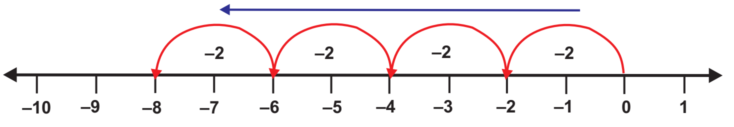
1.1 Multiplication of integers :

Tulasi madam conducted a quiz in her class room. Each correct answer carried 5 marks and each wrong answer carried - 2 marks. Sufiya answered 4 questions correctly and John answered 4 questions wrongly in first round. Let us calculate their marks.

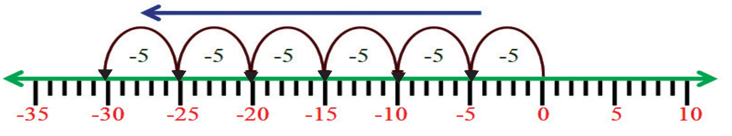
Sufiya's marks	John's marks
$5 + 5 + 5 + 5 = 20$	$(-2) + (-2) + (-2) + (-2) = -8$
4 times of $5 = 20$	4 times of $-2 = -8$
$4 \times 5 = 20$	$4 \times (-2) = -8$



We can represent this using number line also.



another example, $6 \times (-5)$



$6 \times (-5) = -30$

Let us find $6 \times (-5)$ in another way. Put minus sign (–) before the product of 6 and 5 we get –30. $\quad 6 \times (-5) = -(6 \times 5) = -30$

few more examples : $3 \times (-2) = -(3 \times 2) = -6$

$7 \times (-4) = -(7 \times 4) =$ ____

$2 \times (-6) =$ _____ $=$ ____

Check Your Progress

Find the values of (i) $4 \times (-8)$ (ii) $5 \times (-20)$ (iii) $7 \times (-8)$ (iv) $10 \times (-9)$

Observe the following pattern,

$3 \times 4 = 12$
$2 \times 4 = 8$
$1 \times 4 = 4$
$0 \times 4 = 0$
$-1 \times 4 = -4$
$-2 \times 4 = -8$
$-3 \times 4 =$ ___
$-4 \times 4 =$ ___

What is your observation?

How you answered, $-4 \times 4 = -16$?

Let's Explore

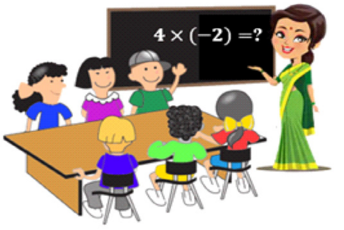
1. Prepare a pattern to find $(-3) \times 5$ starting from 4×5
2. Prepare a pattern to find $(-7) \times 3$ starting from 5×3

పూర్ణసంఖ్యల గుణకారం గురించి మనం తెలుసుకుందాము.

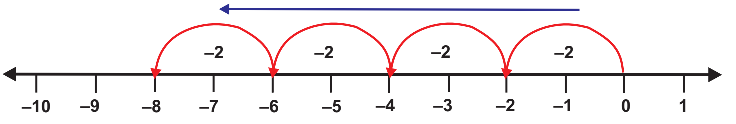
1.1 పూర్ణసంఖ్యల గుణకారం

గణిత ఉపాధ్యాయిని తులసి మేడమ్ తన తరగతిలో క్విజ్ నిర్వహించారు. ప్రతి సరైన సమాధానమునకు 5 మార్కులు మరియు ప్రతి తప్పు సమాధానమునకు –2 మార్కులు. మొదటి రౌండులో సుఫియా 4 ప్రశ్నలకు సరిగ్గా సమాధానం ఇచ్చింది. జాన్ 4 ప్రశ్నలకు తప్పుగా సమాధానం ఇచ్చాడు వారి మార్కులను మనం లెక్కిద్దాము.

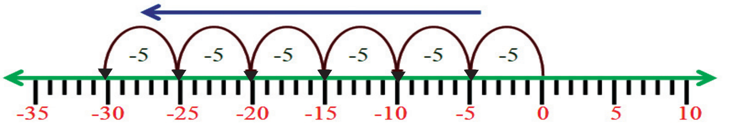
సుఫియా మార్కులు	జాన్ మార్కులు
$5 + 5 + 5 + 5 = 20$	$(-2) + (-2) + (-2) + (-2) = -8$
5 కు 4 రెట్లు = 20	–2 కు 4 రెట్లు = –8
$4 \times 5 = 20$	$4 \times (-2) = -8$



దీనిని సంఖ్యా రేఖపై కూడా సూచించవచ్చు.



మరొక ఉదాహరణ చూద్దాం, $6 \times (-5)$



$$6 \times (-5) = (-30)$$

$6 \times (-5)$ యొక్క విలువను మరొక పద్ధతిలో కనుగొందాం 6 మరియు 5ల లబ్ధము రాసి దాని ముందు ఋణాత్మక (–) సంజ్ఞ ఉంచుము. అప్పుడు మనకు (–30) సమాధానమౌతుంది.

$6 \times (-5) = -(6 \times 5) = -30$

మరికొన్ని ఉదాహరణలు $3 \times (-2) = -(3 \times 2) = -6$

$7 \times (-4) = -(7 \times 4) =$ ____

$2 \times (-6) =$ _____ $=$ ____

నీ ప్రగతిని తెలుసుకో

క్రింది వానిని లెక్కించుము (i) $4 \times (-8)$ (ii) $5 \times (-20)$ (iii) $7 \times (-8)$ (iv) $10 \times (-9)$

క్రింది అమరికను పరిశీలించుము.

$3 \times 4 = 12$

$2 \times 4 = 8$

$1 \times 4 = 4$

$0 \times 4 = 0$

$-1 \times 4 = -4$

$-2 \times 4 = -8$

$-3 \times 4 =$ ___

$-4 \times 4 =$ ___

మీరు ఏమి గమనించారు?

$-4 \times 4 = -16$ అని ఎలా చెప్పగలిగారు?

అన్వేషిద్దాం

1. 4×5 తో ప్రారంభించి $(-3) \times 5$ విలువ కనుగొనుటకు అమరికను రాయుము.
2. 5×3 తో ప్రారంభించి $(-7) \times 3$ విలువ కనుగొనుటకు అమరికను రాయుము.

Find in similar way, $(-6) \times 7 =$ ____ $(-2) \times 5 =$ ______

$(-3) \times 6 =$ ____ $(-4) \times 5 =$ ______

Thus, to multiply the integers having different signs put the negative sign before the product.

For any two integers 'a' and 'b', $(-a) \times b = -(a \times b) = a \times (-b)$

Check Your Progress

Find the values of

(i) $(-6) \times 5$ (ii) $(-15) \times 2$ (iii) $(-12) \times 8$ (iv) $(-10) \times 6$

Multiplication of two negative integers :

Observe the following pattern,

$-2 \times 3 = -6$

$-2 \times 2 = -4$

$-2 \times 1 = -2$

$-2 \times 0 = 0$

$-2 \times (-1) = 2$

$-2 \times (-2) = 4$

$-2 \times (-3) = 6$

Let's Explore

1. Prepare a pattern to find $(-5) \times (-4)$ starting from $(-5) \times 3$
2. Prepare a pattern to find $(-7) \times (-2)$ starting from $(-7) \times 5$

What is your observation?

Based on this observation complete the following

$-2 \times (-4) =$ ____ $-2 \times (-5) =$ ______

So, the product of two negative integer is always positive integer.

For example, $(-9) \times (-2) = 9 \times 2 = 18$

$(-10) \times (-2) = 10 \times 2 = 20$

Check Your Progress

Find the values of

(i) $(-8) \times (-7)$ (ii) $(-15) \times (-6)$ (iii) $(-12) \times (-2)$ (iv) $(-10) \times (-9)$

Let's Do Activity

Here we will use the tokens which has green colour on one side and red colour on other side.

Let green side of token represents a positive and red side of token represents a negative.

● Positive ● Negative

Instructions: To multiply two integers,

- Arrange the 2nd Integer as columns and 1st Integer as rows.
- If 1st Integer is negative then flip the tokens after arrangement.
- Count the tokens, that number will be answer.

అదే విధంగా క్రింది వాటిని లెక్కించుము. $(-6) \times 7 =$ ____ $(-2) \times 5 =$ ______

$(-3) \times 6 =$ ____ $(-4) \times 5 =$ ______

అందువలన. విభిన్న సంజ్ఞలు కలిగి ఉన్న పూర్ణ సంఖ్యలను గుణించటానికి వాటి లబ్ధము ముందు ఋణాత్మక సంజ్ఞ (–) ను ఉంచుము.

***a, b* లు ఏవైనా రెండు పూర్ణ సంఖ్యలు అయిన, $(-a) \times b = -(a \times b) = a \times (-b)$**

నీ ప్రగతిని తెలుసుకో

కింది వాటిని లెక్కించుము.

(i) $(-6) \times 5$ (ii) $(-15) \times 2$ (iii) $(-12) \times 8$ (iv) $(-10) \times 6$

రెండు పూర్ణ సంఖ్యల లబ్దము :

కింది అమరికను పరిశీలించుము.

$-2 \times 3 = -6$

$-2 \times 2 = -4$

$-2 \times 1 = -2$

$-2 \times 0 = 0$

$-2 \times (-1) = 2$

$-2 \times (-2) = 4$

$-2 \times (-3) = 6$

అన్వేషిద్దాం

1. $(-5) \times 3$తో ప్రారంభించి $(-5) \times (-4)$ విలువ కనుగొనుటకు అమరికను రాయుము.
2. $(-7) \times 5$ తో ప్రారంభించి $(-7) \times (-2)$ విలువ కనుగొనుటకు అమరికను రాయుము.

పై అమరిక నుండి ఏమి గమనించారు?

ఈ పరిశీలన ఆధారంగా కింది వాటిని పూర్తి చేయండి.

$-2 \times (-4) =$ ____ $-2 \times (-5) =$ ______

కాబట్టి రెండు ఋణ పూర్ణ సంఖ్యల లబ్దము ఎల్లప్పుడూ ధన పూర్ణ సంఖ్య అవుతుంది.

ఉదాహరణకు, $(-9) \times (-2) = 9 \times 2 = 18$

$(-10) \times (-2) = 10 \times 2 = 20$

నీ ప్రగతిని తెలుసుకో

కింది వాటిని లెక్కించుము

(i) $(-8) \times (-7)$ (ii) $(-15) \times (-6)$ (iii) $(-12) \times (-2)$ (iv) $(-10) \times (-9)$

ఈ కృత్యములో ఒక వైపు ఆకు పచ్చరంగు మరియు మరో వైపు ఎరుపు రంగు గల టోకెన్లను ఉపయోగిస్తాం.

టోకెన్ల పై వైపు ఆకుపచ్చ రంగులో ఉంటే అది ధన సంఖ్యను, ఎరుపు రంగులో ఉంటే అది ఋణ సంఖ్యను సూచిస్తుందని అనుకుందాము.

● ధన సంఖ్య ● ఋణ సంఖ్య

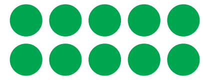
సూచనలు : రెండు పూర్ణసంఖ్యలను గుణించాలంటే,

- రెండవ పూర్ణసంఖ్యను నిలువు వరుసలో మొదటి పూర్ణసంఖ్యను అడ్డువరసలలో అమర్చాలి.
- మొదటి పూర్ణసంఖ్య ఋణ సంఖ్య అయితే, వచ్చిన అమరికలో టోకెన్‌లను త్రిప్పి అమర్చాలి.
- టోకెన్లను లెక్కించినట్లయితే ఆ సంఖ్య సమాధానము అవుతుంది.

We remember that 2 × 5 means add 5 for 2 times

Case (i): Positive integer × Positive integer

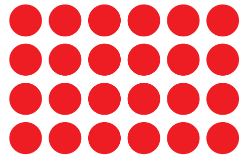
Eg: (+2) × (+5) means 2 times of 5



∴ (+2) × (+5) = 10

Case (ii): Positive integer × Negative integer

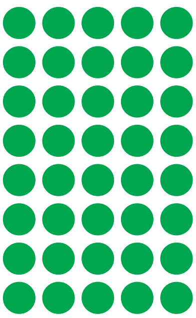
Eg: 4 × (– 6) means 4 times of (– 6)



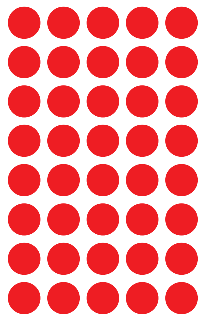
∴ 4 × (– 6) = – 24

Case (iii): Negative integer × Positive integer

Eg: (–8) × 5



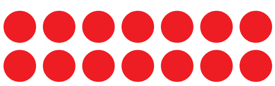
flip the tokens



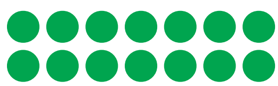
∴ (–8) × 5 = –40

Case (iv): Negative integer × Negative integer

Eg: (–2) × (–7)



flip the tokens



∴ (–2) × (– 7) = 14

So, we can generalise the multiplication of two integers as follows

1. If the signs of two integers are same then the product is positive integer.
2. If the signs of two integers are different then the product is negative integer.

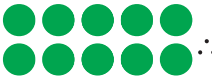
Historical Note

The idea of the products involving negative numbers was first considered by Brahmagupta of India in the seventh century AD. It is described in his book Brahmasphuta Siddantham. He makes the definition such as negative times negative is positive to give a single general method for formulizing problems involving a number and its square, and for finding their solutions.

2 × 5 అనగా 5కు 2 రెట్లు అని గుర్తుచేసుకుందాము.

సందర్భము (i) : ధన పూర్ణ సంఖ్య × ధన పూర్ణ సంఖ్య

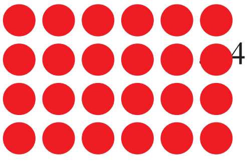
ఉదా : (+2) × (+5) అనగా 5కు 2 రెట్లు



$\therefore$ (+2) × (+5) = 10

సందర్భము (ii) : ధన పూర్ణ సంఖ్య × ఋణ పూర్ణ సంఖ్య

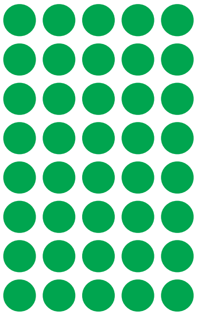
ఉదా : 4 × (– 6) అనగా – 6 కు 4 రెట్లు



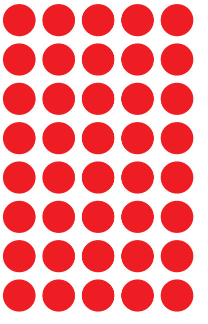
4 × (– 6) = – 24

సందర్భము (iii) : ఋణ పూర్ణ సంఖ్య × ధన పూర్ణ సంఖ్య

ఉదా : (–8) × 5



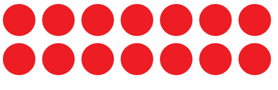
టోకెన్‌లను త్రిప్పి అమర్చాలి



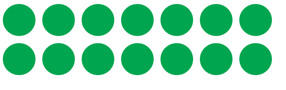
$\therefore$ (–8) × 5 = –40

సందర్భము (iv): ఋణ పూర్ణ సంఖ్య × ఋణ పూర్ణ సంఖ్య

ఉదా : (–2) × (–7)



టోకెన్‌లను త్రిప్పి అమర్చాలి



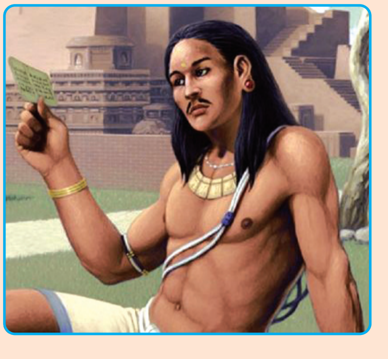
$\therefore$ (–2) × (– 7) = 14

కావున, రెండు పూర్ణ సంఖ్యల గుణకారాన్ని కింది విధంగా సాధారణీకరించవచ్చు.

1. రెండు పూర్ణ సంఖ్యలు ఒకే గుర్తు కలిగి ఉంటే వాటి లబ్ధము ధన పూర్ణ సంఖ్య అవుతుంది.
2. రెండు పూర్ణ సంఖ్యలు వేరు వేరు గుర్తులు కలిగి ఉంటే వాటి లబ్ధము ఋణ పూర్ణ సంఖ్య అవుతుంది.

• చారిత్రక అంశము •

క్రీ.శ. 7వ శతాబ్దములోనే భారతీయ గణిత శాస్త్రవేత్త బ్రహ్మగుప్తుడు తన పుస్తకమైన **'బ్రహ్మస్ఫుట సిద్ధాంతము'** నందు ఋణసంఖ్యల లబ్ధములను మొదటిసారిగా ప్రస్తావించాడు. ఇతను ఒక సంఖ్య మరియు వాటి వర్గాలతో కూడిన సమస్యల సూత్రీకరణకు ఒక సాధారణ పద్ధతి ఇవ్వడానికి మరియు వాటి సాధన కనుగొనుటకు ఋణసంఖ్యను ఋణసంఖ్యతో గుణించిన లబ్ధము ధనసంఖ్య అని నిర్వచించాడు.



Fill the grid by multiplying each number in the first column with each number in the first row and answer the following questions.

×	– 5	– 4	– 3	– 2	– 1	0	1	2	3	4	5
– 5	25								-15		
– 4											-20
– 3			9								
– 2						0					
– 1											
0		0									
1											
2											
3											
4				-8							
5										20	

1. Write your observations from the table.
2. What happens when an integer multiplied with (–1)?
3. When will we get product of two integers is zero?

Example 1: A sump is full of water, when the motor started pumping the level of water decreasing 2 inches per minute then what is the level of water from the ground level after 20 minutes?

Solution: The change in level of water per minute = –2 inches (decreasing 2 inches)

The level of water after 20 minutes = 20 × (–2)

= –40 inches

So, the level of water in sump is 40 inches depth from the ground level.

Do you know?
1 inch = 2.54cm

Example 2 : An elevator begins from 20m above the ground. It descends into a mine shaft at the rate of 6m per minute. what will be its position after 15 minutes?

Solution : Since the elevator is going down, so the distance covered by it will be represented by a negative integer.

Change in position of the elevator in one minute = –6m

Change in position of the elevator in 15 minutes = 15 × (–6) = –90m

So, the final position of the elevator = 20 + (–90) = – 70m

∴ The elevator is at 70m below the ground level.

క్రింది పట్టికలో మొదటి నిలువు వరసలో ప్రతిసంఖ్యను మొదటి అడ్డువరుసలోని ప్రతి సంఖ్యతో గుణిస్తూ పట్టికను పూరించుము. ఇవ్వబడిన ప్రశ్నలకు సమాధానాలు ఇవ్వండి.

×	– 5	– 4	– 3	– 2	– 1	0	1	2	3	4	5
– 5	25								-15		
– 4											-20
– 3			9								
– 2						0					
– 1											
0		0									
1											
2											
3											
4				-8							
5										20	

1. పట్టిక నుండి మీరు ఏమి గమనించారో రాయండి
2. పూర్ణసంఖ్యను (–1) చే గుణకారం చేసినపుడు ఏమవుతుంది?
3. రెండు పూర్ణసంఖ్యల లబ్ధము సున్నా ఎప్పుడు అవుతుంది?

ఉదాహరణ 1: నీటి గుంట (సంప్) పూర్తిగా నీటితో నిండివుంది. మోటారుతో నీటిని తోడడం వలన నీటి స్థాయి నిముషానికి రెండు అంగుళాల చొప్పున తగ్గిన 20 నిముషాల తరువాత నేలమట్టము నుండి నీరు ఎంత దూరములో ఉంటుంది?

సాధన : ఒక నిముషములో నీటి మట్టములో మార్పు $= -2$ అంగుళాలు (2 అంగుళాలు తగ్గినది)

20 నిముషాల తరువాత నీటి మట్టములో మార్పు $= 20 \times (-2)$

$= -40$ అంగుళాలు

కావున, నీటి గుంటలో నీరు నేల మట్టము నుండి 40 అంగుళాల లోతులో ఉండును.

మీకు తెలుసా?
1 అంగుళం = 2.54 సెం.మీ

ఉదాహరణ 2: భూమి నుంచి 20మీటర్ల ఎత్తు నుంచి ఒక లిఫ్ట్ ప్రారంభమయింది.అది గని లోపలికి నిముషానికి 6 మీటర్ల చొప్పున కిందికి వెళ్ళిన, 15 నిముషాల తరువాత దాని స్థానము కనుగొనుము.

సాధన : లిఫ్ట్ కిందికి వెళ్తున్నది కావున అది వెళ్ళే దూరాన్ని రుణ పూర్ణ సంఖ్యతో సూచిస్తాము.

ఒక నిమిషంలో లిఫ్ట్ యొక్క స్థానములో మార్పు $= -6$ మీ.

15 నిముషాలలో లిఫ్ట్ యొక్క స్థానములో మార్పు $= 15 \times (-6) = -90$మీ.

15 నిముషాల తరువాత లిఫ్ట్ యొక్క స్థానము $= 20 + (-90) = -70$మీ.

$\therefore$ లిఫ్ట్ నేల మట్టము నుండి 70 మీటర్లు లోతులో ఉండును.

Example 3 : In a test, (+5) marks are given for every correct answer and (–3) marks are given for every incorrect answer. Lakshmi gets 45 correct and 15 incorrect answers. What is her score?

Solution : Marks given for one correct answer = 5

Marks obtained for 45 correct answers = 45 × 5 = 225

Marks given for one incorrect answer = –3

Marks obtained for 15 incorrect answers = 15 × (–3) = –45

∴ Lakshmi's score = 225 + (–45) = 180.

Exercise - 1.1

1. Multiply the following

i)	5 × 7	ii)	(–9) × (6)	iii)	(9) × (–4)	iv)	(8) × (–7)
v)	(–124) × (–1)	vi)	(–12) × (–7)	vii)	(–63) × 7	viii)	7 × (–15)

2. Which is greater?

   i) 2 × (–5) or 3 × (–4) ii) (–6) × (–7) or (–8) × 5

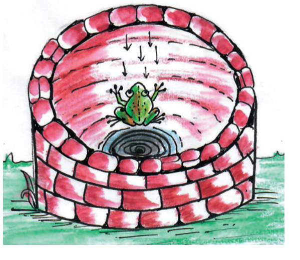
   iii) (–6) × 10 or (–3) × (–21) iv) 9 × (–11) or 6 × (–16)

   v) (–8) × (–5) or (–9) × (–4)

3. Write the pair of integers whose product gives,

   i) A negative integer ii) A positive integer iii) Zero

4. A frog is slipping into a well from upper surface at a rate of 3 meters per minute, after 5 minutes what is the position of the frog in the well?



5. During the summer, the level of water in a pond decreases by 5 inches every week due to evaporation. What is the change in the level of the water over a period of 6 weeks?

6. A shop keeper earns a profit of ₹5 on one note book and loss of ₹3 on one pen by selling in the month of July. He sells 1500 books and 1500 pens. Find out what is his profit or loss?

7. A cement company earns a profit of ₹8 per bag of white cement and a loss of ₹6 per bag of grey cement by selling.The company sells 2,000 bags of white cement and 3,000 bags of grey cement in a month. Find out what is its profit or loss?

ఉదాహరణ 3 : ఒక పరీక్షలో రాయబడిన సరైన సమాధానానికి (+5) మార్కులు, తప్పు అయిన సమాధానానికి (−3) మార్కులు కేటాయించడం జరిగింది. లక్ష్మి రాసిన సమాధానాలలో 45 సరైనవి, 15 తప్పు అయిన ఆమెకు వచ్చిన మార్కులు ఎన్ని?

సాధన : ఒక సరైన సమాధానానికి కొరకు ఇవ్వబడ్డ మార్కులు = 5

45 సరైన సమాధానాలకు మార్కులు = 45 × 5 = 225

ఒక తప్పు సమాధానానికి ఇవ్వబడ్డ మార్కులు = −3

15 తప్పు సమాధానాలకి ఇవ్వబడ్డ మార్కులు = 15 × (−3) = −45

∴లక్ష్మికి వచ్చిన మార్కులు = 225 + (−45) = 180.

అభ్యాసం - 1.1

1. కింది వాటిని గుణించండి.

   i) 5 × 7 ii) (−9) × (6) iii) (9) × (−4) iv) (8) × (−7)

   v) (−124) × (−1) vi) (−12) × (−7) vii) (−63) × 7 viii) 7 × (−15)

2. కింది వాటిలో పెద్దది ఏది?

   i) 2 × (−5) లేదా 3 × (−4) ii) (−6) × (−7) లేదా (−8) × 5

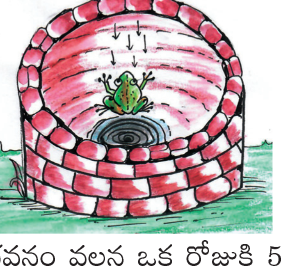
   iii) (−6) × 10 లేదా (−3) × (−21) iv) 9 × (−11) లేదా 6 × (−16)

   v) (−8) × (−5) లేదా (−9) × (−4)

3. లబ్ధము

   i) ఒక ధన పూర్ణ సంఖ్య ii) ఒక రుణ పూర్ణ సంఖ్య iii) సున్నా అగునట్లు పూర్ణ సంఖ్యల జతలనురాయుము.

4. ఒక కప్ప నిముషానికి 3 మీటర్ల వంతున బావి పై ఉపరితలం నుండి లోపలికి జారుతున్నది. కప్ప 5 నిముషాల తరువాత బావిలో ఏ స్థానములో ఉంటుంది?



5. వేసవిలో ఒక కొలనులో నీటి మట్టము బాష్పీ భవనం వలన ఒక రోజుకి 5 అంగుళాల చొప్పున తగ్గుతున్నది. నీటి స్థాయి స్థిర పరిమాణములో తగ్గుచున్నచో, 6 వారాల తరువాత కొలనులో నీటి మట్టములో మార్పు ఎంత ఉండును?

6. ఒక దుకాణదారుడు ఒక్కొక్క పుస్తకం అమ్మడం వలన ₹5లు లాభాన్ని, ఒక్కొక్క పెన్ను అమ్మడం వలన ₹3లు నష్టము పొందును. జూలై నెలలో అతను 1500 పుస్తకాలు మరియు 1500 పెన్నులు అమ్మిన మొత్తం మీద అతనికి వచ్చిన లాభము లేదా నష్టమును కనుగొనుము.

7. ఒక సిమెంటు కంపెనీ ఒక్కొక్క తెలుపు రంగు బస్తా సిమెంటు పై ₹8 లాభం, బూడిద రంగు బస్తా సిమెంటు పై ₹6 నష్టముతో అమ్మింది. ఒక నెలలో 2,000 బస్తాల తెలుపు సిమెంటు 3,000 బస్తాల బూడిద రంగు సిమెంటు అమ్మిన సిమెంటు కంపెనీకి ఆ నెలలో వచ్చిన లాభము లేదా నష్టము కనుగొనుము.

8. Fill in the blanks with suitable integer to make the statement true.

i) (–4) × ____ = –20   ii) ____ × 5 = –35   iii) (–6) × _____ = 48

iv) ____ × (–9) = 45   v) ____ × 7 = – 42   vi) 8 × _______ = –8

1.2 Division of Integers :

Division is the inverse operation of multiplication. Let us see an example, take two non-zero integers 6 × 4 = 24. So, 24 ÷ 4 = 6 and 24 ÷ 6 = 4

We can say for each multiplication statement there are two division statements.

Observe the following.

Multiplication statement	Division statements
5 × 3 = 15	15 ÷ 3 = 5 15 ÷ 5 = 3
6 × (–2) = –12	(–12) ÷ 6 = ______ (–12) ÷ (–2) = ______
(–10) × 2 = –20	(–20) ÷ (–10) = ______ ____________
(–5) × (–6) = 30	____________ ____________

Do you know?
Division by zero is not defined

What do you observe from the table?
Thus, we can conclude as follows :

12 ÷ 3 = 4	Positive integer divided by positive integer, the quotient is positive.
(–12) ÷ 3 = –4	Negative integer divided by positive integer, the quotient is negative.
12 ÷ (–3) = –4	Positive integer divided by negative integer, the quotient is negative.
(–12) ÷ (–3) = 4	Negative integer divided by negative integer, the quotient is positive.

Division of two integers follows the same rules of multiplication.

If the signs are same then the quotient is positive.
If the signs are different then the quotient is negative.

Check Your Progress

Fill the following table:

S.No.	Integer 1 ÷ Integer 2	Quotient
1	(+25) ÷ (+5)	5
2	42 ÷ (– 6)	
3	(–75) ÷ 15	
4	(–27) ÷ (–3)	

8. కింది ఖాళీలను సరైన పూర్ణ సంఖ్యచే పూరించుము.

i) $(-4) \times$ ___ $= -20$ ii) ___ $\times 5 = -35$ iii) $(-6) \times$ ____ $= 48$

iv) ___ $\times (-9) = 45$ v) ___ $\times 7 = -42$ vi) $8 \times$ ______ $= -8$

1.2 పూర్ణ సంఖ్యల భాగహారము :

భాగహారం అనేది గుణకారం యొక్క విలోమ పరిక్రియ అని మనకు తెలుసు. ఉదాహరణకు రెండు శూన్యేతర పూర్ణ సంఖ్యలను తీసుకుందాం. $6 \times 4 = 24$ కావున $24 \div 4 = 6$ మరియు $24 \div 6 = 4$

ప్రతి గుణకారానికి రెండు భాగహార వాక్యాలు ఉంటాయని చెప్పవచ్చు.

కింది పట్టికను పరిశీలించి మిగిలిన ఖాళీలను పూరించండి.

గుణకార వాక్యము	భాగహార వాక్యాలు
$5 \times 3 = 15$	$15 \div 3 = 5$ $15 \div 5 = 3$
$6 \times (-2) = -12$	$(-12) \div 6$ = ______ $(-12) \div (-2)$ = ______
$(-10) \times 2 = -20$	$(-20) \div (-10)$ = ______ ______
$(-5) \times (-6) = 30$	______ ______

మీకు తెలుసా?
సున్నాతో భాగహారము నిర్వచించలేము

పై పట్టిక నుండి మీరు ఏమి గమనించారు?

కింద విధముగా సాధారణీకరించవచ్చు.

$12 \div 3 = 4$	ధన పూర్ణసంఖ్యను ధన పూర్ణసంఖ్యతో భాగించిన భాగఫలం ధనాత్మకం.
$(-12) \div 3 = -4$	ఋణ పూర్ణసంఖ్యను ధన పూర్ణసంఖ్యతో భాగించిన భాగఫలం ఋణాత్మకం.
$12 \div (-3) = -4$	ధన పూర్ణసంఖ్యను ఋణ పూర్ణసంఖ్యతో భాగించిన భాగఫలం ఋణాత్మకం.
$(-12) \div (-3) = 4$	ఋణ పూర్ణసంఖ్యను ఋణ పూర్ణసంఖ్యతో భాగించిన భాగఫలం ధనాత్మకం.

రెండు పూర్ణసంఖ్యల భాగహారము కూడా గుర్తుల పరముగా గుణకారము యొక్క నియమాలనే పాటించును.

ఒకే గుర్తు గల రెండు పూర్ణ సంఖ్యల భాగఫలము ధనాత్మకం
వేరు వేరు గుర్తుగల రెండు పూర్ణ సంఖ్యల భాగఫలము ఋణాత్మకం.

నీ ప్రగతిని తెలుసుకో

క్రింది పట్టికను పూర్తి చేయుము.

క్ర.సం	1వ పూర్ణ సంఖ్య ÷ 2వ పూర్ణ సంఖ్య	భాగఫలము
1	$(+25) \div (+5)$	5
2	$42 \div (-6)$	
3	$(-75) \div 15$	
4	$(-27) \div (-3)$	

Example 4 : A borewell machine drills down 72 feet per hour from surface of the earth. If the water is at 360 feet down from surface of earth, after how many hours it will touch the water layer?

Solution : Depth of drilling in one hour = –72 feet

Depth of water layer from surface of earth = –360 feet

Number of hours required = –360 ÷ (–72) = 5

Hence, the borewell machine will touch water layer at 5 hours of drilling.

Example 5 : In a test, (+4) marks are given for every correct answer and (–2) marks are given for every incorrect answer. Sai answered all the questions and scored 26 marks from 8 correct answers. How many incorrect answers had Sai attempted?

Solution : Marks given for one correct answer = 4

So, marks given for 8 correct answers = 4 × 8 = 32

Sai score = 26

Marks obtained for incorrect answers = 26 – 32 = –6

Marks given for one incorrect answer = (–2)

∴ Number of incorrect answers = (–6) ÷ (–2) = 3

Example 6 : Shop keeper Yaseen earns a profit of ₹20 per bag of Sonamasoori rice sold and loss of ₹12 per bag of Hamsa rice. In one week he gets neither profit nor loss, if he solds1440 Sonamasoori rice bags. How many Hamsa rice bags did he sell?

Solution : In the given problem there is neither profit or loss.

So, Profit earned + loss incurred = 0

Profit earned = – loss incurred

Profit earned by selling one Sonamasoori rice bag = ₹20

Profit earned by selling 1440 Sonamasoori rice bag = 1440 × 20 = ₹28800

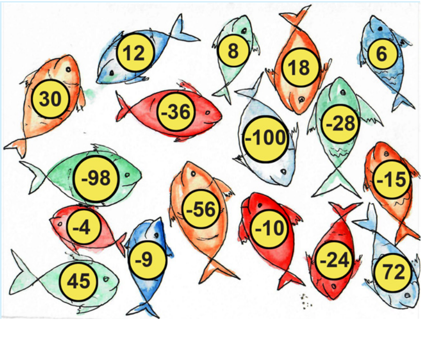
Loss incurred by selling one Hamsa rice bag = ₹ 12 which we denoted by –12

Loss incurred by selling one Hamsa rice bags = ₹ –28800

Total number of Hamsa rice bags sold = (–28800) ÷ (–12) = 2400 bags

Let's Do Activity

The fish in the pond below, carry some numbers. Choose any 4 pairs and carry out four multiplications with those numbers. Now, choose four other pairs and carry out divisions with those numbers.



For example

(i) (–10) × 6 = –60 (ii) (–36) ÷ 6 = –6

ఉదాహరణ 4 : భూ ఉపరితలం నుంచి ఒక బోర్‌వెల్ యంత్రం ప్రతిగంటకు 72 అడుగుల లోతును త్రవ్వగలదు. భూ ఉపరితలం నుంచి 360 అడుగుల లోతులో ఉన్న నీటిపొరను చేరుటకు ఆ యంత్రానికి ఎంత సమయం పడుతుంది?

సాధన: ఒక గంటలో త్రవ్వు లోతు = –72 అడుగులు

ఉపరితలము నుండి నీటిపొర గల దూరము = –360 అడుగులు

నీటిని చేరుటకు పట్టు సమయము = –360 ÷ (–72) = 5

కావున, బోర్‌వెల్ యంత్రం నీటిపొరను చేరుటకు 5 గంటల సమయం పడుతుంది.

ఉదాహరణ 5 : ఒక పరీక్షలో, ప్రతి సరైన సమాధానానికి (+4) మార్కులు, మరియు ప్రతి తప్పు సమాధానానికి (–2) మార్కులు ఇవ్వబడతాయి. సాయి అన్ని ప్రశ్నలకు సమాధానం ఇచ్చారు. సాయి వ్రాసిన 8 సరైన సమాధానాల ద్వారా 26 మార్కులు సాధించాడు. సాయి రాసిన తప్పు సమాధానాలు ఎన్ని?

సాధన: i) ఒక్కొక్క సరైన సమాధానానికి మార్కులు = 4

8 సరైన సమాధానాలకు మార్కులు = 4 × 8 = 32

సాయికి వచ్చిన మార్కులు = 26

తప్పు సమాధానాలకు ఇవ్వబడిన మార్కులు = 26 – 32 = –6

ఒక్కొక్క తప్పు సమాధానానికి మార్కులు = (–2)

∴ సాయి రాసిన తప్పు సమాధానాలు = (–6) ÷ (–2) = 3

ఉదాహరణ 6 : దుకాణదారుడు యాసిన్ ఒక సోనా మసూరి బియ్యపు బస్తా పై ₹20 లాభముతోమరియు హంస బియ్యపు బస్తా పై ₹12 నష్టముతోఅమ్మాడు. ఒక నెలలో1440 సోనా మసూరి బియ్యపు బస్తాలు అమ్మినా లాభము కానీ, నష్టము కానీ రాలేదు. అయిన ఆ నెలలో ఎన్ని హంస బియ్యపు బస్తాలు అమ్మాడు?

సాధన : ఇచ్చిన సమస్యలో లాభము కానీ, నష్టము కానీ లేదు.

కావున, వచ్చిన లాభము + వచ్చిన నష్టము = 0

వచ్చిన లాభము = – వచ్చిన నష్టము

ఒక సోనా మసూరి బియ్యపు బస్తా పై వచ్చు లాభము = ₹20

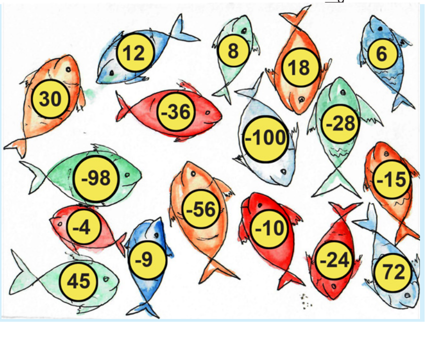
1440 సోనా మసూరి బియ్యపు బస్తాల పై వచ్చు లాభము = 1440 × 20 = ₹28800

హంస బియ్యపు బస్తాలపై వచ్చు నష్టము = –₹28800

ఒక హంస బియ్యపు బస్తా పై వచ్చు నష్టము = ₹12, దీనిని మనం –12గా సూచిస్తాం.

ఆ నెలలో అమ్మిన హంస బియ్యపు బస్తాల సంఖ్య = (–28800) ÷ (–12) = 2400 బస్తాలు.

పక్క కొలనులోని చేపలపై కొన్ని సంఖ్యలు ఉన్నవి. ఏవేని 4 జతల సంఖ్యలను ఎన్నుకొని 4 గుణకార వాక్యాలు రాయుము. తరువాత 4 జతల సంఖ్యలను ఎన్నుకొని 4 భాగహార వాక్యాలు రాయుము.



ఉదాహరణ:

(i) (–10) × 6 = –60 (ii) –36 ÷ 6 = –6

Exercise - 1.2

1. Calculate the following.

   i) (–96) ÷ 16 ii) 98 ÷ (–49) iii) (–51) ÷ 17 iv) 38 ÷ (–19)

   v) (–80) ÷ 20 vi) (–150) ÷ (–25) vii) (–600) ÷ 60 viii) (–54) ÷ 9

   ix) 130 ÷ 65 x) (–315) ÷ (–315)

2. The product of two integers is –165. If one number is –15, Find the other integer.

3. Because of covid-19 a company lockdown for 6 months and got loss of ₹1,32,000 in the year 2020. Find the average loss of each month.

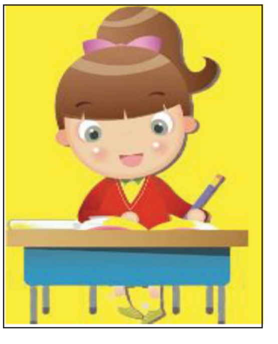
4. The temperature at 12 noon was 10°C above zero. If it decreases at the rate of 2°C per hour until midnight, at what time would the temperature be 8°C below zero? What would be the temperature at mid-night?

5. A green grocer earns a profit of ₹7 per kg of tomato and got loss of ₹4 per kg of brinjal by selling. On Monday he gets neither profit or loss, if he sold 68 kgs of tomato. How many kgs of brinjal did he sell?

6. In a test, + 3 marks are given for every correct answer and –1 mark are given for every incorrect answer. Sona attempted all the questions and scored +20 marks though she got 10 correct answers.

   i) How many incorrect answers she attempted?

   ii) How many questions were given in the test?

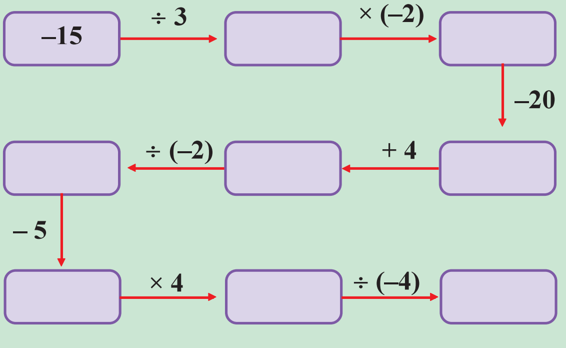


7. Write 5 pairs of integers (a, b) such that a ÷ b = –4.

   (Example:(12, –3) because 12÷ (–3) = – 4)

Puzzle time

Jasvi says her favorite number through puzzle. Find it.



Do you know?

'∈' '∉'

These symbols are used to indicate whether the given element belongs to the given collection or not.

0 ∈ W (0 belongs to whole numbers)

0 ∉ N (0 does not belongs to natural numbers)

–3 ∈ Z (–3 belongs to integers)

అభ్యాసం - 1.2

1. క్రింది వాటిని లెక్కించండి.

i) $(-96) \div 16$	ii) $98 \div (-49)$	iii) $(-51) \div 17$	iv) $38 \div (-19)$
v) $(-80) \div 20$	vi) $(-150) \div (-25)$	vii) $(-600) \div 60$	viii) $(-54) \div 9$
ix) $130 \div 65$	x) $(-315) \div (-315)$		

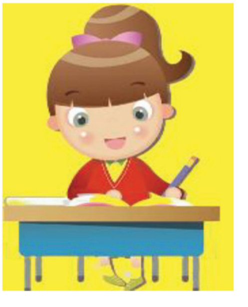
2. రెండు పూర్ణ సంఖ్యల లబ్దము -165 మరియు అందులో ఒక సంఖ్య -15 అయిన రెండవ సంఖ్య ఎంత?

3. 2020 సం. లో కోవిడ్-19 లాక్ డౌన్ వలన ఒక కంపెనీ 6 నెలలలో ₹1,32,000 నష్టపోయిన, నెలసరి సరాసరి నష్టము కనుగొనుము.

4. మధ్యాహ్నం 12 గంటలకు ఉష్ణోగ్రత 0^0 పైన 10°C అని గుర్తించబడినది. ఉష్ణోగ్రత ప్రతి గంటకు 2^0C చొప్పున అర్ధరాత్రి వరకు తగ్గుతుంది. ఏ సమయానికి 0^0 కన్నా 8^0C తక్కువగా ఉంటుంది. అర్ధరాత్రి ఉష్ణోగ్రత ఎంత?

5. ఒక కూరగాయల వ్యాపారి ఒక కి.గ్రా. టమోటా పై ₹7 లాభముతో, ఒక కి.గ్రా. వంకాయల పై ₹4 నష్టముతో అమ్మాడు. అతను సోమవారము 68 కి.గ్రా. ల టమాటాలు అమ్మినా లాభము కానీ నష్టము కానీ రాలేదు. అయిన అతను ఆ రోజు ఎన్ని కి.గ్రా.ల వంకాయలు అమ్మాడు?

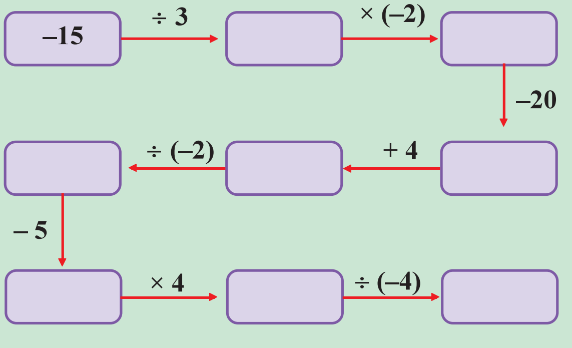
6. ఒక పరీక్షలో, ప్రతి సరైన సమాధానానికి (+3) మార్కులు, మరియు ప్రతి తప్పు కు (-1) మార్కులు ఇవ్వబడతాయి. సోనా అన్ని ప్రశ్నలకు సమాధానాలు వ్రాయగా, అందులో 10 సరియైనవి మరియు ఆమె 20 మార్కులు పొందినది.
   i) ఆమె రాసిన తప్పు సమాధానాలు ఎన్ని?
   ii) పరీక్షలో ఇవ్వబడిన మొత్తం ప్రశ్నలు ఎన్ని?



7. $a \div b = -4$ అగునట్లు 5 పూర్ణ సంఖ్యల జతలు (a, b) వ్రాయుము. (ఉదాహరణ: (12, -3) ఎందుకనగా $12 \div (-3) = -4$).

పజిల్ టైమ్

జశ్వి తన ఇష్టమైన సంఖ్యను ఒక పజిల్ రూపములో చెప్పినది. మీరు ఆ సంఖ్యను కనుగొనండి.



మీకు తెలుసా '∈' '∉'

ఒక సంఖ్య, ఇచ్చిన సముదాయానికి చెందినదా? లేదా? అని తెలియజేయుటకు ఈ గుర్తులు ఉపయోగిస్తాము.

$0 \in W$ (0 పూర్ణాంకాల సముదాయానికి చెందును)

$0 \notin N$ (0 సహజ సంఖ్యా సముదాయానికి చెందదు)

$-3 \in Z$ (-3 పూర్ణ సంఖ్యల సముదాయానికి చెందును).

1.3 Properties of Integers :

In previous class we learnt the properties of whole numbers. Here we will learn the properties of integers. Let us learn properties of integers under four fundamental operations simultaneously.

i) ***Closure property:*** Observe the following and complete the tables.

Addition	
Statement	**Conclusion**
$-5 + 3 = -2$	The sum is an integer
$-3 + (-2) =$	
$0 + (-3) =$	
$7 + (-6) =$	The sum is an integer
The sum of any two integers also an integer.	
For any two integers a and b, a + b is also an integer (a, b ∈ Z then a + b ∈Z)	

Multiplication	
Statement	**Conclusion**
$-5 \times 3 = -15$	
$-3 \times (-2) =$	The product is an integer
$0 \times (-3) =$	
$7 \times (-6) =$	
The product of any two integers is also an integer.	
For any two integers a and b, a × b is also an integer (a, b ∈ Z then a × b ∈Z)	

∴ ***Integers are closed under addition and multiplication.***

Let's think

Can you find at least one pair of integers whose sum or product is not an integer?

Subtraction	
Statement	**Conclusion**
$-7 - 8 = -15$	The difference is an integer
$-5 - (-3) =$	
$0 - (-3) =$	
$9 - (-6) =$	The difference is an integer
The difference of any two integers is an integer.	
For any two integers a and b, a – b is also an integer (a, b ∈ Z then a – b ∈Z)	

Division	
Statement	**Conclusion**
$9 \div 10 = 0.9$	The quotient is not an integer
$-6 \div (-2) = 3$	The quotient is an integer
$0 \div (-3) =$	
$7 \div (-6) =$	
In general, the quotient of any two integers need not an integer.	
For any two integers a and b (b ≠ 0), a ÷ b need not an integer (a, b ∈ Z then a ÷ b ∈Z)	

∴ ***Integers are closed under subtraction***

Integers need not closed under division

ii) Commutative Law :

Observe the following and complete the tables.

Addition		
Statement 1	**Statement 2**	**Conclusion**
$-6 + 3 = -3$	$3 + (-6) = -3$	$-6 + 3 = 3 + (-6)$
$3 + (-9) =$	$(-9) + 3 =$	
$-6 + (-5) =$	$(-5) + (-6) =$	
$-3 + 2 =$		
$4 + (-5) =$		
For any two integers a and b, a + b = b + a		

Multiplication		
Statement 1	**Statement 2**	**Conclusion**
$-6 \times 3 = -3$	$3 \times (-6) = -3$	$-6 \times 3 = 3 \times (-6)$
$3 \times (-9) =$	$(-9) \times 3 =$	
$-6 \times (-5) =$	$(-5) \times (-6) =$	
$-3 \times 2 =$		
$4 \times (-5) =$		
For any two integers a and b, a × b = b × a		

∴ ***Integers are commutative under additon and multiplication.***

1.3 పూర్ణ సంఖ్యల ధర్మాలు:

క్రింది తరగతిలో పూర్ణాంకాల ధర్మాలు నేర్చుకున్నాము. ఇపుడు మనము పూర్ణసంఖ్యల ధర్మాలను నేర్చుకుందాము. నాలుగు చతుర్విధ ప్రక్రియలపై పూర్ణ సంఖ్యల ధర్మాలను ఒకే సారి పరిశీలిద్దాం.

i) సంవృత ధర్మము : కింది పట్టికలను పరిశీలించి మిగిలిన ఖాళీలు పూరించుము.

సంకలనం	
ప్రవచనం	సారాంశం
$-5 + 3 = -2$	మొత్తం ఒక పూర్ణ సంఖ్య
$-3 + (-2) =$	
$0 + (-3) =$	
$7 + (-6) =$	మొత్తం ఒక పూర్ణ సంఖ్య
ఏవేని రెండు పూర్ణ సంఖ్యల యొక్క మొత్తం కూడా ఒక పూర్ణ సంఖ్య అవుతుంది.	
a మరియు b, లు ఏవైనా రెండు పూర్ణసంఖ్యలు అయిన a + b కూడా పూర్ణ సంఖ్య (a, b ∈ Z అయిన a + b ∈ Z)	

గుణకారం	
ప్రవచనం	సారాంశం
$-5 \times 3 = -15$	
$-3 \times (-2) =$	లబ్ధము ఒక పూర్ణ సంఖ్య
$0 \times (-3) =$	
$7 \times (-6) =$	
ఏవేని రెండు పూర్ణ సంఖ్యల యొక్క లబ్ధము కూడా ఒక పూర్ణ సంఖ్య అవుతుంది.	
a మరియు b, లు ఏవైనా రెండు పూర్ణ సంఖ్యలు అయిన a × b కూడా పూర్ణ సంఖ్య. (a, b ∈ Z అయిన a × b ∈ Z)	

∴ పూర్ణ సంఖ్యలు సంకలనము, గుణకారము దృష్ట్యా సంవృత ధర్మాన్ని పాటిస్తాయి.

ఆలోచిద్దాం!

మొత్తము లేదా లబ్ధము పూర్ణ సంఖ్య కాని సంఖ్య అగునట్లు కనీసం రెండు పూర్ణ సంఖ్యల జత చెప్పగలమా?

వ్యవకలనం	
ప్రవచనం	సారాంశం
$-7 - 8 = -15$	భేదము ఒక పూర్ణ సంఖ్య
$-5 - (-3) =$	
$0 - (-3) =$	
$9 - (-6) =$	భేదము ఒక పూర్ణ సంఖ్య
ఏవేని రెండు పూర్ణ సంఖ్యల యొక్క భేదము కూడా ఒక పూర్ణ సంఖ్య అవుతుంది.	
a మరియు b, లు ఏవైనా రెండు పూర్ణ సంఖ్యలు అయిన a – b కూడా పూర్ణ సంఖ్య. (a, b ∈ Z అయిన a – b ∈ Z)	

భాగహారం	
ప్రవచనం	సారాంశం
$9 \div 10 = 0.9$	భాగఫలం ఒక పూర్ణ సంఖ్య కాదు
$-6 \div (-2) = 3$	
$0 \div (-3) =$	
$7 \div (-6) =$	
సాధారణంగా, రెండు పూర్ణ సంఖ్యల భాగఫలం ఒక పూర్ణ సంఖ్య కావలసిన అవసరం లేదు.	
a మరియు b (b ≠ 0) లు ఏవైనా రెండు పూర్ణ సంఖ్యలు అయిన a ÷ b ఒక పూర్ణ సంఖ్య కాదు. (a, b ∈ Z అయిన a ÷ b ∉ Z)	

∴ పూర్ణ సంఖ్యలు వ్యవకలనము దృష్ట్యా సంవృత ధర్మాన్ని పాటిస్తాయి. కానీ భాగహారము దృష్ట్యా సంవృత ధర్మాన్ని పాటించవు.

ii) వినిమయ (స్థిత్యంతర) న్యాయము:

కింది పట్టికలను పరిశీలించి, పూర్తిచేయుము.

సంకలనం		
ప్రవచనం 1	ప్రవచనం 2	సారాంశం
$-6 + 3 = -3$	$3 + (-6) = -3$	$-6 + 3 = 3 + (-6)$
$3 + (-9) =$	$(-9) + 3 =$	
$-6 + (-5) =$	$(-5) + (-6) =$	
$-3 + 2 =$		
$4 + (-5) =$		
a మరియు b లు ఏవైనా రెండు పూర్ణ సంఖ్యలు అయిన, a + b = b + a		

గుణకారం		
ప్రవచనం 1	ప్రవచనం 2	సారాంశం
$-6 \times 3 = -3$	$3 \times (-6) = -3$	$-6 \times 3 = 3 \times (-6)$
$3 \times (-9) =$	$(-9) \times 3 =$	
$-6 \times (-5) =$	$(-5) \times (-6) =$	
$-3 \times 2 =$		
$4 \times (-5) =$		
a మరియు b లు ఏవైనా రెండు పూర్ణ సంఖ్యలు అయిన, a × b = b × a		

∴ పూర్ణ సంఖ్యలు సంకలనము మరియు గుణకారము దృష్ట్యా వినిమయ (స్థిత్యంతర) న్యాయము పాటిస్తాయి.

Subtraction		
Statement 1	**Statement 2**	**Conclusion**
$-6-3=-9$	$3-(-6)=9$	$-6-3 \neq 3+(-6)$
$5-(-9)=$	$(-9)-5=$	
For any two integers a and b, $a-b \neq b-a$		

Division		
Statement 1	**Statement 2**	**Conclusion**
$2 \div 10 = 0.2$	$3 \times (-6) = -3$	$2 \div 10 \neq 10 \div 2$
$3 \div (-9) = -{}^{1}/_{3}$	$(-9) \div 3 =$	
In general, for any two integers a,b ($b \neq 0$), $a \div b \neq b \div a$		

∴ Integers are not commutative under subtraction and division.

iii) Associative Law :

Observe the following and complete the tables.

Addition		
Statement 1	**Statement 2**	**Conclusion**
$(-6+3)+2$ $= -3+2$ $=-1$	$-6+(3+2)=$ $-6+5$ $=-1$	$(-6+3)+2=$ $-6+(3+2)$
$[3+(-9)]+(-5)]$ = =	$3+[(-9)+(-5)]$ = =	
$[-6+(-5)]+6$ = =	$-6+[(-5)+6]$ = =	
For any three integers a, b and c, $(a+b)+c = a+(b+c)$		

Multiplication		
Statement 1	**Statement 2**	**Conclusion**
$(-6\times3)\times2$ $= -18\times2$ $= -36$	$-6\times(3\times2)=$ -6×6 $= -36$	$(-6\times3)\times2=$ $-6\times(3\times2)$
$[3\times(-9)]\times(-5)]$ = =	$3\times[(-9)\times(-5)]$ = =	
$[-6\times(-5)]\times6$ = =	$-6\times[(-5)\times6]$ = =	
For any three integers a, b and c, $(a\times b)\times c = a\times(b\times c)$		

∴ Integers are associative under additon and multiplication.

Subtraction		
Statement 1	**Statement 2**	**Conclusion**
$(-6-3)-2$ $=-9-2$ $=-11$	$-6-(3-2)$ $=-6-1$ $=-7$	$(-6-3)-2$ $\neq -6-(3-2)$
$[3-(-9)]-(-5)$ = =	$3-[(-9)-(-5)]$ = =	
In general, for any three integers a, b and c, $(a-b)-c \neq a-(b-c)$		

Division		
Statement 1	**Statement 2**	**Conclusion**
$(-18\div6)\div3$ $=-3\div3$ $=-1$	$-18\div(6\div3)$ $=-18\div2$ $=-9$	$(-6\div3)\div2 \neq -6\div(3\div2)$
$[16\div(-4)]\div(-2)$ = =	$16\div[(-4)\div(-2)]$ = =	
In general, for any three integers a, b and c, $(a\div b)\div c \neq a\div(b\div c)$		

∴ Integers are not associative under subtraction and division.

వ్యవకలనం		
ప్రవచనం 1	ప్రవచనం 2	సారాంశం
$-6-3=-9$	$3-(-6)=9$	$-6-3\neq 3+(-6)$
$5-(-9)=$	$(-9)-5=$	
a మరియు b లు ఏవైనా రెండు పూర్ణ సంఖ్యలు అయిన $a-b\neq b-a$		

భాగహారం		
ప్రవచనం 1	ప్రవచనం 2	సారాంశం
$2\div 10=0.2$	$3\times(-6)=-3$	$2\div 10\neq 10\div 2$
$3\div(-9)=-{}^{1}/_{3}$	$(-9)\div 3=$	
సాధారణంగా, a మరియు b ($b\neq 0$) లు ఏవైనా రెండు పూర్ణ సంఖ్యలు అయిన $a\div b\neq b\div a$		

∴ పూర్ణ సంఖ్యలు వ్యవకలనము మరియు భాగహారముల దృష్ట్యా వినిమయ (స్థిత్యంతర) న్యాయమును పాటించవు.

iii) **సహచర న్యాయము :** కింది పట్టికలను పరిశీలించి, పూర్తిచేయుము.

సంకలనం		
ప్రవచనం 1	ప్రవచనం 2	సారాంశం
$(-6+3)+2$ $=-3+2$ $=-1$	$-6+(3+2)=$ $-6+5$ $=-1$	$(-6+3)+2=$ $-6+(3+2)$
$[3+(-9)]+(-5)]$ = =	$3+[(-9)+(-5)]$ = =	
$[-6+(-5)]+6$ = =	$-6+[(-5)+6]$ = =	
a, b మరియు c లు ఏవైనా రెండు పూర్ణ సంఖ్యలు అయిన $(a+b)+c=a+(b+c)$		

గుణకారం		
ప్రవచనం 1	ప్రవచనం 2	సారాంశం
$(-6\times 3)\times 2$ $=-18\times 2$ $=-36$	$-6\times(3\times 2)=$ -6×6 $=-36$	$(-6\times 3)\times 2=$ $-6\times(3\times 2)$
$[3\times(-9)]\times(-5)]$ = =	$3\times[(-9)\times(-5)]$ = =	
$[-6\times(-5)]\times 6$ = =	$-6\times[(-5)\times 6]$ = =	
a, b మరియు c లు ఏవైనా మూడు పూర్ణ సంఖ్యలు అయిన $(a\times b)\times c=a\times(b\times c)$		

∴ పూర్ణ సంఖ్యలు సంకలనము మరియు గుణకారముల దృష్ట్యా సహచర న్యాయము పాటిస్తాయి.

వ్యవకలనం		
ప్రవచనం 1	ప్రవచనం 2	సారాంశం
$(-6-3)-2$ $=-9-2$ $=-11$	$-6-(3-2)$ $=-6-1$ $=-7$	$(-6-3)-2$ $\neq -6-(3-2)$
$[3-(-9)]-(-5)$ = =	$3-[(-9)-(-5)]$ = =	
సాధారణంగా, a, b మరియు c, లు ఏవైనా మూడు పూర్ణ సంఖ్యలు అయిన $(a-b)-c\neq a-(b-c)$		

భాగహారం		
ప్రవచనం 1	ప్రవచనం 2	సారాంశం
$(-18\div 6)\div 3$ $=-3\div 3$ $=-1$	$-18\div(6\div 3)$ $=-18\div 2$ $=-9$	$(-6\div 3)\div 2\neq -6\div(3\div 2)$
$[16\div(-4)]\div(-2)$ = =	$16\div[(-4)\div(-2)]$ = =	
సాధారణంగా, a, b మరియు c, లు ఏవైనా మూడు పూర్ణ సంఖ్యలు అయిన $(a\div b)\div c\neq a\div(b\div c)$		

∴ పూర్ణ సంఖ్యలు వ్యవకలనము మరియు భాగహారముల దృష్ట్యా సహచర న్యాయమును పాటించవు.

iv) Identity property:

Addition	Multiplication
$3 + \underline{\quad\quad} = 3$	$3 \times 1 = 3$
$0 + (-3) = \underline{\quad\quad}$	$\underline{\quad\quad} \times (-3) = -3$
$-2 + \underline{\quad\quad} = -2$	$-2 \times \underline{\quad\quad} = -2$
$\underline{\quad\quad} + 5 = 5$	$\underline{\quad\quad} \times 5 = 5$
$-6 + \underline{\quad\quad} = -6$	$-6 \times \underline{\quad\quad} = -6$
For any integer $\boldsymbol{a}$, $a + 0 = 0 + a = a$	For any integer $\boldsymbol{a}$, $a \times 1 = 1 \times a = a$
∴ Zero is the additive identity	**∴ 1 is multiplicative identity .**

v) Additive inverse property :

What should be added to -3 to get additive identity 0?

Observe the following,

$$4 + (-4) = 0$$
$$(-5) + 5 = \underline{\quad}$$
$$(-6) + \underline{\quad} = 0$$

In each pair given above, one integer is called the additive inverse of the other integer.

For any integer 'a', there exists an integer (–a) such that $a + (-a) = (-a) + a = 0$.

Both the integers a and –a are called 'additive inverse' of each other.

We get additive inverse of an integer a when we multiply (–1) to a.

Example 7 : Find the additive inverses of (+2) and (–3).

Solution : Additive inverse of $+2 = -(+2) = -2$.

Additive inverse of $-3 = -(-3) = +3$.

Check Your Progress

Write the additive inverses of 5, –8, 1 and 0

Let's think

What should be multiplied by 6 to get multiplicative identity 1?
Is it exist in integers?

vi) Distributive law :

Let us take three integers –2, 1 and 3,

i) $-2 \times (1 + 3) = [(-2) \times 1] + [(-2) \times 3]$

$$-2 \times 4 = -2 + (-6)$$
$$-8 = -8$$

Let us take three integers –1, 3 and –5,

ii) $-1 \times [3 + (-5)] = [(-1) \times 3] + [(-1) \times (-5)]$

$$-1 \times (-2) = -3 + (+5)$$
$$2 = 2$$

You will find that in each case, the left-hand side is equal to the right-hand side.

For any integers a, b and c, $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$

Thus, multiplication distributes over addition of integers.

iv) తత్సమ ధర్మము :

సంకలనం
$3 + ___ = 3$
$0 + (-3) = ___$
$-2 + ___ = -2$
$___ + 5 = 5$
$-6 + ___ = -6$
a ఏదేని పూర్ణ సంఖ్య అయిన $a + 0 = 0 + a = a$
$\therefore$ పూర్ణ సంఖ్యలకు సంకలన తత్సమాంశము '0'

గుణకారం
$3 \times 1 = 3$
$___ \times (-3) = -3$
$-2 \times ___ = -2$
$___ \times 5 = 5$
$-6 \times ___ = -6$
a ఏదేని పూర్ణ సంఖ్య అయిన $a \times 1 = 1 \times a = a$
$\therefore$ పూర్ణ సంఖ్యలకు గుణకార తత్సమాంశము '1'

v) సంకలన విలోమ న్యాయము:

−3 కు ఎంత కలిపిన సంకలన తత్సమాంశము '0' వచ్చును?

కింది వాటిని పరిశీలించండి, $4 + (-4) = 0$

$(-5) + 5 = __$

$(-6) + __ = 0$

పై జతలలో ప్రతి సంఖ్యను రెండవ సంఖ్యకు సంకలన విలోమము అంటారు.

ప్రతి పూర్ణ సంఖ్య a కి $a + (-a) = (-a) + a = 0$ అగునట్లు $-a$ పూర్ణ సంఖ్య ఉంటుంది.

a మరియు '$-a$' లు పరస్పరము సంకలన విలోమాలు అవుతాయి.

a అనే పూర్ణ సంఖ్యను '−1' చే గుణించుట ద్వారా దాని సంకలన విలోమము పొందవచ్చు.

ఉదాహరణ 7 : (+2) మరియు (−3) ల యొక్క సంకలన విలోమాలను రాయుము.

సాధన : +2 యొక్క సంకలన విలోమము = − (+2) = −2

−3 యొక్క సంకలన విలోమము = −(−3) = +3

నీ ప్రగతిని తెలుసుకో

5, −8, 1, 0 ల యొక్క సంకలన విలోమాలను రాయుము.

ఆలోచిద్దాం!

6 ను ఏ సంఖ్యతో గుణించిన గుణకార తత్సమాంశము '1' వస్తుంది? అది పూర్ణ సంఖ్యయేనా?

vi) విభాగ న్యాయము:

మూడు పూర్ణ సంఖ్యలు −2, 1 మరియు 3 తీసుకుందాం.

i) $-2 \times (1 + 3) = [(-2) \times 1] + [(-2) \times 3]$

$-2 \times 4 = -2 + (-6)$

$-8 = -8$

మరో మూడు పూర్ణ సంఖ్యలు −1, 3 మరియు −5 తీసుకుందాం.

ii) $-1 \times [3 + (-5)] = [(-1) \times 3] + [(-1) \times (-5)]$

$-1 \times (-2) = -3 + (+5)$

$2 = 2$

ప్రతి సందర్భములోనూ ఎడమ చేతి వైపు ఉన్న విలువ, కుడి చేతి వైపు ఉన్న విలువకు సమానము.

> a, b మరియు c లు ఏవేని మూడు పూర్ణ సంఖ్యలు అయిన, $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$

కావున, పూర్ణ సంఖ్యలు సంకలనము పై గుణకారము విభాగ న్యాయమును పాటిస్తాయి.

Let's think

Verify $-3 \times [(-4) - 2] = [(-3) \times (-4)] - [(-3) \times 2]$. Is multiplication distribute over subtraction of integers? Write your conclusion.

Let us see multiplication of two or more negative numbers.

Observe the following :

$(-1) \times (-1) = +1$

$(-1) \times (-1) \times (-1) = -1$

$(-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) = +1$

$(-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) = -1$

This means ***if negative integer multiplied even number of times, the product is positive integer. If negative integer multiplied odd number of times, the product is negative integer.***

Example 8 : Multiply the following using associative law.

i) $-25 \times (-4) \times 2 \times (-8)$ ii) $(-20) \times (-2) \times (-5) \times 7$

Solution : i) $-25 \times (-4) \times 2 \times (-8) = [-25 \times (-4)] \times 2 \times (-8)$

$= [100 \times 2] \times (-8) = 200 \times (-8) = -1600$

ii) $(-20) \times (-2) \times (-5) \times 7 = (-20) \times [(-2) \times (-5)] \times 7$

$= [(-20) \times 10] \times 7 = -200 \times 7 = -1400$

Example 9 : Are $(-42) \times (-7)$ and $(-7) \times (-42)$ equal? Write the law.

Solution : $(-42) \times (-7) = +294$

$(-7) \times (-42) = +294$

$\therefore (-42) \times (-7) = (-7) \times (-42)$

It is multiplicative commutative law.

Example 10 : Simplify $26 \times (-48) + (-48) \times (-36)$ using suitable laws.

Solution : $26 \times (-48) + (-48) \times (-36) = (-48) \times 26 + (-48) \times (-36)$ (Commutative law)

$= (-48) \times [26 + (-36)]$ (Distributive law)

$= (-48) \times (-10)$

$= 480$

Exercise - 1.3

1. Identify the laws in the following statements :

i) $-3 + 5 = 5 + (-3)$

ii) $-2 \times 1 = 1 \times (-2) = -2$

iii) $[(-5) \times 2)] \times 3 = (-5) \times [(2 \times 3)]$

iv) $18 \times [7 + (-3)] = [18 \times 7] + [18 \times (-3)]$

v) $-5 \times 6 = -30$

vi) $-3 + 0 = 0 + (-3) = -3$

ఆలోచిద్దాం!

$-3 \times [(-4) - 2] = [(-3) \times (-4)] - [(-3) \times 2]$ను సరిచూడుము.
పూర్ణసంఖ్యలు వ్యవకలనము పై గుణకారము విభాగ న్యాయమును పాటిస్తాయా?
మీరు ఏమి పరిశీలించారు?

రెండు లేదా అంతకంటే ఎక్కువ ఋణ సంఖ్యల గుణకారము గురించి తెలుసుకుందాము.

కింది అమరికను పరిశీలించుము.

$(-1) \times (-1) = +1$

$(-1) \times (-1) \times (-1) = -1$

$(-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) = +1$

$(-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) = -1$

పై వాటిని పరిశీలించిన, ***గుణించిన ఋణ పూర్ణ సంఖ్యల సంఖ్య సరిసంఖ్య అయిన వాటిలబ్ధము ధన పూర్ణ సంఖ్య అగును. అలాగే గుణించిన ఋణ పూర్ణ సంఖ్యల సంఖ్య బేసి సంఖ్య అయిన వాటి లబ్ధము ఋణ పూర్ణ సంఖ్య అగును.***

ఉదాహరణ 8 : క్రింది వాటిని సహచర న్యాయముఆధారంగా కనుగొనుము.

i) $-25 \times (-4) \times 2 \times (-8)$ ii) $(-20) \times (-2) \times (-5) \times 7$

సాధన: i) $-25 \times (-4) \times 2 \times (-8) = [-25 \times (-4)] \times 2 \times (-8)$

$= [100 \times 2] \times (-8) = 200 \times (-8) = -1600$

ii) $(-20) \times (-2) \times (-5) \times 7 = (-20) \times [(-2) \times (-5)] \times 7$

$= [(-20) \times 10] \times 7 = -200 \times 7 = -1400$

ఉదాహరణ 9 : $(-42) \times (-7)$ మరియు $(-7) \times (-42)$ సమానమా? ఇది ఏ న్యాయము?

సాధన : $(-42) \times (-7) = +294$

$(-7) \times (-42) = +294$

$\therefore (-42) \times (-7) = (-7) \times (-42)$

ఇది గుణకార వినిమయ (స్థిత్యంతర) న్యాయము.

ఉదాహరణ 10 : $26 \times (-48) + (-48) \times (-36)$ ను తగిన న్యాయాలనుపయోగించి సూక్ష్మీకరించుము.

సాధన : $26 \times (-48) + (-48) \times (-36) = (-48) \times 26 + (-48) \times (-36)$ (వినిమయ న్యాయము)

$= (-48) \times [26 + (-36)]$ (విభాగ న్యాయము)

$= (-48) \times (-10)$

$= 480$

అభ్యాసం - 1.3

1. కింది వాటిలో ఉన్న ధర్మాలను గుర్తించి రాయండి.

i) $-3 + 5 = 5 + (-3)$ ii) $-2 \times 1 = 1 \times (-2) = -2$

iii) $[(-5) \times 2)] \times 3 = (-5) \times [(2 \times 3)]$ iv) $18 \times [7 + (-3)] = [18 \times 7] + [18 \times (-3)]$

v) $-5 \times 6 = -30$ vi) $-3 + 0 = 0 + (-3) = -3$

2. What will be the sign of the product of the following :

   i) 24 times of negative integer. ii) 35 times of negative integer.

3. Write the numbers in the blanks by using appropriate law.

   i) $-3 + ____ = -3$ ii) $2 \times (-3) = (-3) \times ___$

   iii) $-6 + [3 + (-2)] = [(-6) + ____] + ____$ iv) $-6 \times ___ = -6$

   v) $5 \times [(-6) + 9] = ____ \times (-6) + 5 \times ____$

4. State true or false. Give the reasons.

   i) 2 is the multiplicative identity of –2.

   ii) Integers are commutative under subtraction.

   iii) For any two integers a and b, $a \times b = b \times a$

   iv) The division of integer by zero is not defined.

   v) $6 + (-6) = (-6) + 6 = 0$ indicates additive identity property.

5. Simplify the following using suitable laws.

   i) $-11 \times (-25) \times (-4)$ ii) $3 \times (-18) + 3 \times (-32)$

6. Are the integers are associative under subtraction? Explain by an example.

7. Verify $[(-5) \times 2)] \times 3 = (-5) \times [(2 \times 3)]$

1.4 BODMAS Rule :

Salma madam gave following problem to her students.

Find the value of $2 + 3 \times 4$

Two students Sarayu and Sanvi solved the problem in the following way.

Sarayu

$2 + 3 \times 4 = 5 \times 4 = 20$

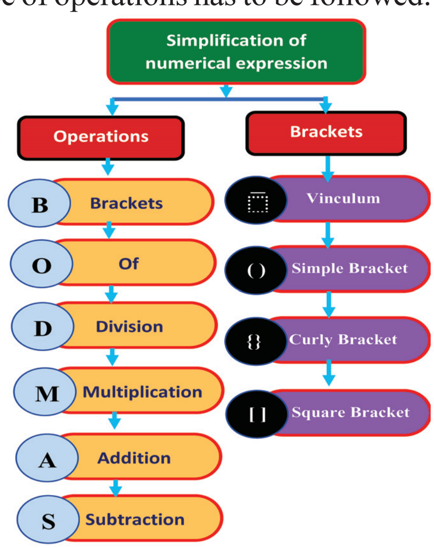
Sanvi

$2 + 3 \times 4 = 2 + 12 = 14$

Who is correct?

To simplify arithmetic expressions, which involve various operations like brackets, multiplication, subtraction, addition, etc., a particular sequence of operations has to be followed.

In the above problem Sanvi is correct because in arithmetic operations, multiplication should be done first before addition is taken up.



The hierarchy of arithmetic operations to be followed is given by a rule called BODMAS rule.

To simplify an arithmetic expressions, we should perform the operation in order as shown in figure. After brackets O in the BODMAS rule that stands for 'of' which means multiplication. After O, the next operation is D it stands for division. This is followed by M which stands for multiplication. After multiplication, A that stands for addition will be performed. Then, S meant for subtraction is performed.

2. కింది సందర్భాలలో లబ్దము యొక్క సంజ్ఞ (గుర్తు)ను రాయండి.

   i) 24 ఋణ పూర్ణ సంఖ్యల లబ్దము ii) 35 ఋణ పూర్ణ సంఖ్యల లబ్దము

3. కింది ఖాళీల నందు సరైన పూర్ణ సంఖ్యలను తగిన న్యాయాల ఆధారంగా పూరించుము.

   i) $-3 + ____ = -3$ ii) $2 \times (-3) = (-3) \times ___$

   iii) $-6 + [3 + (-2)] = [(-6) + ____] + ____$ iv) $-6 \times ___ = -6$

   v) $5 \times [(-6) + 9] = ____ \times (-6) + 5 \times ____$

4. కింది వాక్యాలు సత్యమా? అసత్యమా? కారణాలు తెలుపుము.

   i) 2 యొక్క గుణకార తత్సమాంశము –2.

   ii) పూర్ణ సంఖ్యలు వ్యవకలనము దృష్ట్యా వినిమయ న్యాయము పాటిస్తాయి.

   iii) a మరియు b లు ఏవైనా రెండు పూర్ణ సంఖ్యలు అయిన $a \times b = b \times a$.

   iv) సున్నాతో పూర్ణసంఖ్యల భాగహారము నిర్వచించబడదు.

   v) $6 + (-6) = (-6) + 6 = 0$ అనునది సంకలన తత్సమ ధర్మమును సూచించును.

5. కింది వాటిని తగిన న్యాయాలనుపయోగించి సూక్ష్మీకరించుము.

   i) $-11 \times (-25) \times (-4)$ ii) $3 \times (-18) + 3 \times (-32)$

6. పూర్ణ సంఖ్యలు వ్యవకలనము దృష్ట్యా సహచర న్యాయమును పాటిస్తాయా? ఉదాహరణ ద్వారా వివరించుము.

7. $[(-5) \times 2)] \times 3 = (-5) \times [(2 \times 3)]$ సరిచూడుము.

1.4 BODMAS నియమము :

తన విద్యార్థులకు సల్మా మేడం కింది సమస్యను ఇచ్చారు.

$2 + 3 \times 4$ యొక్క విలువ కనుగొనుము?

పై సమస్యను సరయు మరియు శాన్వి అను ఇద్దరు విద్యార్థులు కింది విధంగా సాధించారు.

సరయు

$2 + 3 \times 4 = 5 \times 4 = 20$

శాన్వి

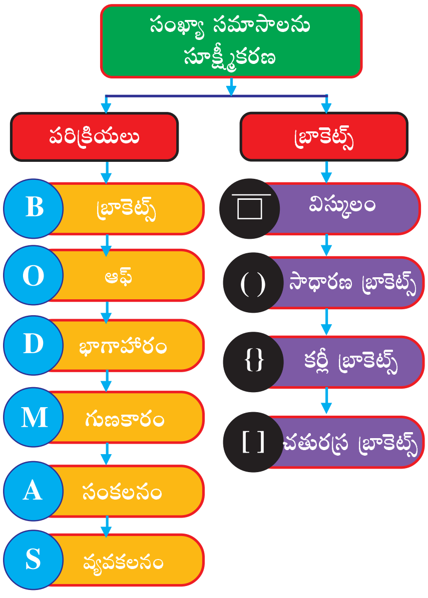
$2 + 3 \times 4 = 2 + 12 = 14$

పై ఇద్దరిలో ఎవరు సరైన సమాధానమిచ్చారు?

వివిధ రకాల అంకగణిత పరిక్రియలు అయిన సంకలనము, వ్యవకలనము, గుణకారము, భాగహారము మరియు బ్రాకెట్లతో కూడిన సంఖ్యా సమాసాలను సూక్ష్మీకరించడానికి ఒక క్రమపద్ధతిలో పరిక్రియలను పూర్తిచేయాల్సి ఉంటుంది. పై ఉదాహరణలో శాన్వి సరైన సమాధానమిచ్చింది. ఎందుకనగా అంకగణిత పరిక్రియలలో సంకలనము కన్నా ముందు గుణకార పరిక్రియ చేయాలి.

అంకగణిత పరిక్రియలను పూర్తి చేయాల్సిన క్రమాన్ని తెలిపే నియమమే BODMAS నియమము.

సంఖ్యా సమాసాలను సూక్ష్మీకరించడానికిపటములో చూపిన విధముగా క్రమ పద్ధతిలో పరిక్రియలను పూర్తిచేయాల్సి ఉంటుంది. BODMASలో మొదట బ్రాకెట్స్ (B), తరువాత ఉన్న 'O' అనునది 'of' (గుణకారము)ను తెలియజేయును. తరువాత D భాగహారమును, M గుణకారము, A సంకలనమును, S వ్యవకలనమును తెలియజేయును. ఈ క్రమములో పరిక్రియలు పూర్తి చేయాలి.



There are four types of brackets:

1. **Vinculum**: This is represented by a bar on the top of the numbers.

   For example: $2 + 3 - \overline{4 + 3}$. Here, the figures under the vinculum have to be calculated as 4 + 3 first and the 'minus' sign before 4 is applicable to 7. Thus, the given expression is equal to 2 + 3 – 7 which is equal to –2.

2. **Simple Bracket**: This is represented by ( )

3. **Curly Bracket**: This is represented by { }

4. **Square Bracket**: This is represented by [ ]

The brackets in an expression have to be opened in the order of vinculum, simple brackets, curly brackets and square brackets, i.e., [{(—)}] to be opened from inside to outwards.

Within every bracket also we should follow order of BODMAS rule.

Example 11 : Simplify $3 \times 2 + 8 \div 4$

Solution :

$3 \times 2 + 8 \div 4$ (Division)

$= 3 \times 2 + 2$ (Multiplication)

$= 6 + 2$ (Addition)

$= 8$

Check Your Progress

Simplify the following.

(i) $5 \times 6 - 6$ (ii) $24 \div 3 \times 3 - 30$ (iii) $5 \times 5 - 5 \div 5 + 5$

Example 12 : Simplify $7 \times 6 - \overline{8 - 4}$

Solution :

$7 \times 6 - \overline{8 - 4}$ (Vinculum)

$= 7 \times 6 - 4$ (Multiplication)

$= 42 - 4$ (Subtraction)

$= 38$

Example 13 : Simplify $18 + 64 \div 4\ \{26 - (14 - \overline{7 - 3})\}$

Solution :

$18 + 64 \div 4\{26 - (14 - 4)\}$ (Vinculum)

$= 18 + 64 \div 4\{26 - (14 - 4)\}$ (Simple bracket)

$= 18 + 64 \div 4\{26 - 10\}$ (Curly bracket)

$= 18 + 64 \div 4\ \{16\}$ (Of)

$= 18 + 64 \div 64$ (Division)

$= 18 + 1$ (Addition)

$= 19$

బ్రాకెట్లు నాలుగు రకాలుగా ఉంటాయి.

1. **విన్కులం బ్రాకెట్ :** దీనిని సంఖ్యలపై గీత ఉంచడం ద్వారా సూచిస్తాము.

   ఉదాహరణ: $2 + 3 - \overline{4 + 3}$. ఇక్కడ విన్కులం బ్రాకెట్ కింద ఉన్న 4 + 3 ని మొదట లెక్కించాలి. అనగా 4 ముందు వున్న ఋణ గుర్తు 7 కు వర్తించును. కావున ఇచ్చిన సంఖ్యా సమాసపు విలువ 2 + 3 - 7కు సమానము. ఇది −2 కు సమానము అవుతుంది.

2. **సాధారణ బ్రాకెట్:** దీనిని ( ) తో సూచిస్తాము.
3. **కర్లీ బ్రాకెట్:** దీనిని { } తో సూచిస్తాము.
4. **చతురస్ర బ్రాకెట్:** దీనిని [ ] తో సూచిస్తాము.

   సంఖ్యా సమాసాల సూక్ష్మీకరణలో బ్రాకెట్స్‌ను విన్కులం బ్రాకెట్, సాధారణ బ్రాకెట్, కర్లీ బ్రాకెట్, చతురస్ర బ్రాకెట్ క్రమములో పూర్తి చేయాలి. అనగా $[\{(\overline{-})\}]$ లను లోపలి నుండి బయటకు క్రమములో పూర్తిచేయాలి. ప్రతి బ్రాకెట్ నందు కూడా BODMAS నియమము పాటించాలి.

ఉదాహరణ 11 : $3 \times 2 + 8 \div 4$ సూక్ష్మీకరించుము.

సాధన :

$3 \times 2 + 8 \div 4$ (భాగహారము)

$= 3 \times 2 + 2$ (గుణకారము)

$= 6 + 2$ (సంకలనము)

$= 8$

నీ ప్రగతిని తెలుసుకో

సూక్ష్మీకరించుము:
(i) $5 \times 6 - 6$ (ii) $24 \div 3 \times 3 - 30$ (iii) $5 \times 5 - 5 \div 5 + 5$

ఉదాహరణ 12 : $7 \times 6 - \overline{8 - 4}$ సూక్ష్మీకరించుము

సాధన :

$7 \times 6 - \overline{8 - 4}$ (విన్కులం)

$= 7 \times 6 - 4$ (గుణకారము)

$= 42 - 4$ (వ్యవకలనము)

$= 38$

ఉదాహరణ 13 : $18 + 64 \div 4 \{26 - (14 - \overline{7 - 3})\}$ సూక్ష్మీకరించుము

సాధన :

$18 + 64 \div 4 \{26 - (14 - 4)\}$ (విన్కులం)

$= 18 + 64 \div 4 \{26 - (14 - 4)\}$ (సాధారణ బ్రాకెట్)

$= 18 + 64 \div 4 \{26 - 10\}$ (కర్లీ బ్రాకెట్)

$= 18 + 64 \div 4 \{16\}$ (ఆఫ్)

$= 18 + 64 \div 64$ (భాగహారము)

$= 18 + 1$ (సంకలనము)

$= 19$

Exercise - 1.4

1. Simplify the following:

   i) $6 \times 9 - 6 \div 3$ ii) $12 \div 4 - 8 + 5$

   iii) $80 - 56 \div 8 \times 9$ iv) $15 \div 5 + 17 - 30$

   v) $8 + 8 - 8 \times 8 \div 8$

2. Simplify the following:

   i) $8 \times 3 - \overline{13 - 7}$ ii) $\{12 - \overline{14 - 8} + 7\} - 15$

   iii) $16 - (4 + 18 \div 6 - \overline{7 - 5}) \times 5$ iv) $\{6 \text{ of } 145 \div (3 + 2)\} \div 2 - 4 \text{ of } 20$

   v) $25 + [14 - 18 + \{12 \text{ of } 5 - (-4 + 14)\}]$

3. Identify the true statements.

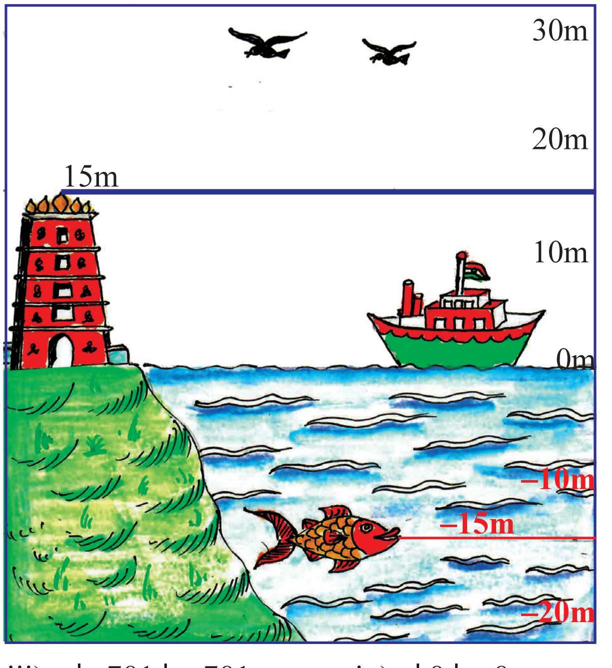
   i) $48 \div 6 - 4 = 24$ ii) $-18 + 12 \div 3 = -14$

   iii) $-11 + 3 \times 7 = -56$ iv) $2020 \div 20 - 100 = 1$

4. Fill the blanks with +, –, ×, ÷ to make the statement true.

   i) 9 __ 3 __ 6 = –3   ii) –6 __ 12 __ 6 = –4   iii) –15__3 __6 = –30

Absolute value :



Look at the picture, at what level does the ship sails on the sea?

How can we represent the height of the temple using integer? How can we represent the depth of the fish from the sea level using integer?

Though they represent with different integers, their distance from the sea level is same. In this case we need absolute value.

Numerical value of an integer without considering it's sign is the absolute value of that integer.

The absolute value of a number is always non negative. Absolute value of a is denoted by | a |. Read it as modulus of a.

Examples: i) $|-50| = 50$ ii) $|60| = 60$ iii) $|-701| = 701$ iv) $|0| = 0$

v) If $x > 5$, then $|x - 5| = x - 5$ (why?)   vi) If $x < 5$, then $|x - 5| = 5 - x$ (why?)

So, we can generalise,

If $x > 0$, then $|x| = x$
If $x < 0$, then $|x| = -x$ (why?)
If $x = 0$, then $|x| = 0$

అభ్యాసం - 1.4

1. కింది వాటిని సూక్ష్మీకరించుము.

   i) $6 \times 9 - 6 \div 3$ ii) $12 \div 4 - 8 + 5$

   iii) $80 - 56 \div 8 \times 9$ iv) $15 \div 5 + 17 - 30$

   v) $8 + 8 - 8 \times 8 \div 8$

2. కింది వాటిని సూక్ష్మీకరించుము.

   i) $8 \times 3 - \overline{13 - 7}$ ii) $\{12 - \overline{14 - 8} + 7\} - 15$

   iii) $16 - (4 + 18 \div 6 - \overline{7 - 5}) \times 5$ iv) $\{6 \text{ of } 145 \div (3 + 2)\} \div 2 - 4 \text{ of } 20$

   v) $25 + [14 - 18 + \{12 \text{ of } 5 - (-4 + 14)\}]$

3. కింది వాటిలో సత్య వాక్యాలను గుర్తించుము.

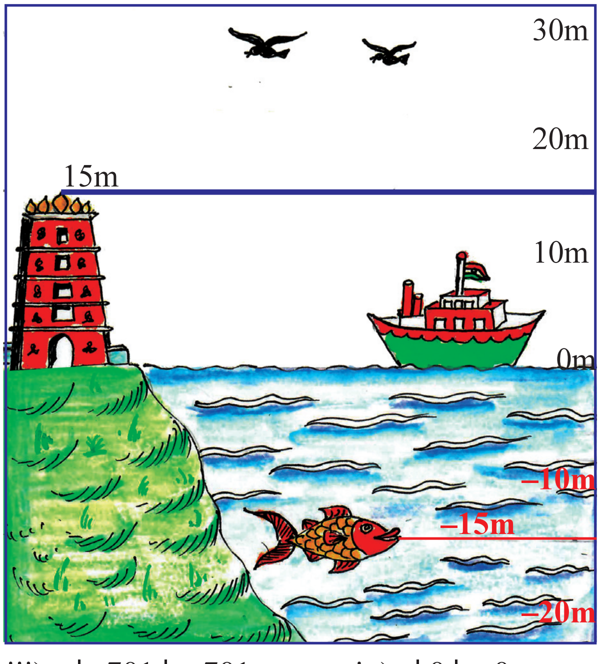
   i) $48 \div 6 - 4 = 24$ ii) $-18 + 12 \div 3 = -14$

   iii) $-11 + 3 \times 7 = -56$ iv) $2020 \div 20 - 100 = 1$

4. కింది వాక్యాలు సత్యమయ్యే విధముగా ఖాళీలను $+, -, \times, \div$ లతో పూరించుము.

   i) 9 __ 3 __ 6 = –3 ii) –6 __ 12 __ 6 = –4 iii) –15__3 __6 = –30

పరమ మూల్యము:



పటమును గమనించుము. సముద్ర ఉపరితలమునుండి ఎంత ఎత్తులో ఓడ ప్రయానిస్తున్నది?

పటములోని సముద్ర ఉపరితలము నుండి దేవాలయము ఎత్తును పూర్ణ సంఖ్యతో ఎలా సూచిస్తాము?

సముద్ర ఉపరితలము నుండి చేప ఈదుతున్న లోతును పూర్ణ సంఖ్యతో ఎలా సూచిస్తాము?

పై రెండు వేరు వేరు పూర్ణ సంఖ్యలతో సూచించినప్పటికీ సముద్ర ఉపరితలము నుండి అవి సమాన దూరములో ఉన్నవి.

ఇలాంటి సందర్భాలలో పరమమూల్యము అవసరమౌతుంది.

ఒక పూర్ణ సంఖ్యయొక్క సంఖ్యా విలువ (దాని గుర్తును పరిగణనలోకి తీసుకోకుండా)ను దాని యొక్క పరమ మూల్యము అంటారు.

ఒక సంఖ్య యొక్క పరమ మూల్యము ఎల్లప్పుడూ రుణాత్మకం కాదు. a యొక్క పరమ మూల్యమును $|a|$ తో సూచిస్తాము. దీనిని a యొక్క మోడ్యులస్ అని చదువుతాం.

ఉదాహరణ i) $|-50| = 50$ ii) $|60| = 60$ iii) $|-701| = 701$ iv) $|0| = 0$

v) $x > 5$ అయిన, $|x - 5| = x - 5$ (ఎందుకు?) vi) $x < 5$ అయిన, $|x - 5| = 5 - x$ (ఎందుకు?)

కావున దీనిని మనం క్రింది విధంగా సాధారణీకరించవచ్చు.

$x > 0$ అయిన $|x| = x$

$x < 0$ అయిన $|x| = -x$ (ఎందుకు?)

$x = 0$ అయిన $|x| = 0$

Let's Explore

If $|x| = 15$ then what will be the value of x? Discuss

Unit Exercise

1. Calculate the following.

   i) $8 \times (-1)$ ii) $(-2) \times 175$ iii) $(-3) \times (-40)$ iv) $(-24) \times (-7)$

   v) $(-7) \div (-1)$ vi) $(-12) \div (+6)$ vii) $(-49) \div (-7)$ viii) $(+63) \div (-9)$

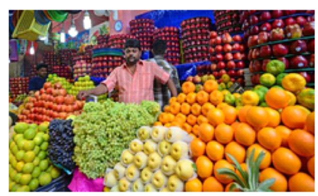
2. Replace the blank with an integer to make it a true statement.

   i) $(-7) \times$ _____ $= 21$ ii) $7 \times$ _____ $= -42$

   iii) _____ $\times (-9) = -72$ iv) _____ $\times (-11) = 132$

   v) $(-25) \div$ _______ $= 1$ vi) $(42) \div$ ___ $= -6$

   vii) _____ $\div (-15) = 6$ viii) _____ $\div (-9) = 16$



3. Write all the possible pairs of integers that give a product of –50.

4. Sankar, a fruit vendor sells 100kg of oranges and 75 kg of pomegranates. If he makes a profit of ₹11 per one kg of pomegranates and loss of ₹8 per one kg oranges, what will be his overall profit or loss?

5. Bhargavi lost 5700 calories in the month of June using yoga. If the calory loss is uniform, calculate the loss of calories per day?

6. Simplify $625 \times (-35) + 625 \times 30$ using suitable law.

7. Simplify the following using BODMAS.

   i) $12 - 36 \div 3$ ii) $6 \times (-7) + (-3) \div 3$ iii) $38 - \{35 - (36 - \underline{34 - 37})\}$

8. Write the absolute values of following numbers.

   i) –700 ii) 150 iii) –150 iv) –35

   v) If $p < 10$, then $|p - 10|$ vi) If $y > 7$, then $|7 - y|$

Points to Remember

X1U4Y2

- The collection of natural numbers (1,2,3,4,5 ...) zero(0) and negative numbers (-1, -2, -3, -4, -5 ...) are integers.
- The product of two positive integers (two negative integers) is positive integer.
- The product of one positive integer and one negative integer is negative integer.
- The quotient of two positive integers (or two negative integers) is positive.
- The quotient of one positive integer and one negative integer is negative.

అన్వేషిద్దాం | $|x| = 15$ అయిన x యొక్క విలువ ఏమవుతుంది? చర్చించండి.

యూనిట్ అభ్యాసం

1. కింది వాటిని లెక్కించుము.

   i) $8 \times (-1)$ ii) $(-2) \times 175$ iii) $(-3) \times (-40)$ iv) $(-24) \times (-7)$

   v) $(-7) \div (-1)$ vi) $(-12) \div (+6)$ vii) $(-49) \div (-7)$ viii) $(+63) \div (-9)$

2. కింది వాక్యాలు సత్యమయ్యే విధముగా ఖాళీలను పూర్ణ సంఖ్యలతో పూరించుము.

   i) $(-7) \times$ _____ $= 21$ ii) $7 \times$ _____ $= -42$

   iii) _____ $\times (-9) = -72$ iv) _____ $\times (-11) = 132$

   v) $(-25) \div$ _____ $=1$ vi) $(42) \div$ ___ $= -6$

   vii) _____ $\div (-15) = 6$ viii) _____ $\div (-9) = 16$

3. లబ్ధము −50 అయ్యే విధముగా వీలైనన్ని పూర్ణ సంఖ్యల జతలు రాయండి.

4. పండ్ల వ్యాపారి శంకర్, 100 కి.గ్రా. కమలా పండ్లు, 75 కి.గ్రా. దానిమ్మ పండ్లు అమ్మాడు. అతను ఒక కి.గ్రా. దానిమ్మ పండ్ల పై ₹11 లాభాన్ని, ఒక కి.గ్రా. కమలా పండ్ల పై ₹8 నష్టాన్ని పొందిన మొత్తము మీద అతనికి ఎంత లాభము లేదా నష్టము?

5. భార్గవి జూన్ నెలలో యోగ ద్వారా 5700 కేలరీలను తగ్గించారు. కేలరీల తగ్గుదల స్థిరంగా వున్న, ఆ నెలలో రోజువారి సరాసరి కేలరీల తగ్గుదల ఎంత?

6. $625 \times (-35) + 625 \times 30$ ను తగిన న్యాయాలనుపయోగించి సూక్ష్మీకరించుము.

7. BODMAS ను ఉపయోగించి సూక్ష్మీకరించుము.

   i) $12 - 36 \div 3$ ii) $6 \times (-7) + (-3) \div 3$ iii) $38 - \{35 - (36 - \overline{34 - 37})\}$

8. కింది సంఖ్యలకు పరమ మూల్య విలువను కనుగొనుము.

   i) -700 ii) 150 iii) -150 iv) -35

   v) $p < 10$ అయిన, $|p - 10|$ vi) $y > 7$ అయిన, $|7 - y|$

గుర్తుంచుకోవాల్సిన అంశాలు

B3F9K6

- సహజ సంఖ్యలు (1,2,3,4,5 ...), సున్న (0) మరియు రుణ సంఖ్యలను (−1, −2, −3, −4, −5 ...) కలిపి పూర్ణసంఖ్యలు అంటారు.
- రెండు ధన పూర్ణ సంఖ్యల లేదా రెండు ఋణ పూర్ణ సంఖ్యల లబ్ధము ఒక ధన పూర్ణ సంఖ్య.
- ఒక ధన పూర్ణ సంఖ్యను ఋణ పూర్ణ సంఖ్యచే గానీ లేదా ఋణ పూర్ణ సంఖ్యను ధన పూర్ణ సంఖ్యతో గుణించిన లబ్ధము ఋణ పూర్ణ సంఖ్య అవుతుంది.
- ఒక ధన పూర్ణ సంఖ్యను మరొక ధన పూర్ణ సంఖ్యచే లేదా ఒక ఋణ పూర్ణ సంఖ్యను మరొక ఋణ పూర్ణ సంఖ్యతో భాగించిన భాగఫలం ఒక ధన సంఖ్య.
- ఒక ధన పూర్ణ సంఖ్యను ఋణ పూర్ణ సంఖ్యచే గానీ లేదా ఋణ పూర్ణ సంఖ్యను ధన పూర్ణ సంఖ్యతో భాగించిన భాగఫలం ఋణ పూర్ణ సంఖ్య అవుతుంది.

Properties of Integers				
Property Name	**Operations**			
	Addition	**Subtraction**	**Multiplication**	**Division**
	If a, b, c $\in$ Z			If a, b, c are non-zero integers
Closure	$a + b \in Z$	$a - b \in Z$	$a \times b \in Z$	$a \div b \notin Z$
Commutative	$a + b = b + a$	$a - b \neq b - a$	$a \times b = b \times a$	$a \div b \neq b \div a$
Associative	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(a - b) - c \neq a - (b - c)$	$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$	$(a \div b) \div c \neq a \div (b \div c)$
Identity	$a + 0 = a$, $0 + a = a$	Not applicable	$a \times 1 = a$, $1 \times a = a$	Not applicable
Distributive	$a \times (b + c) = ab + ac$	$a \times (b - c) = ab - ac$	Not applicable	Not applicable

- To simplify arithmetic expressions, we must follow the BODMAS rule (Brackets, Of, Division, Multiplication, Addition, Subtraction).
- The brackets in an expression have to be opened in the order of vinculum, simple brackets, curly brackets and square brackets, i.e., [{(—)}] to be opened from inside to outwards.
- Numerical value of an integer without considering its sign is the **absolute value** of that integer. Absolute value never be negative.

Number Series - 1

A number series can be considered as a collection of numbers in which all the terms are formed according to some particular rule or all the terms follow a particular pattern. The relation of any term to its proceeding term will be same throughout the series. we have to find out the rule in which the terms of the series areselected and depending on that rule we have to find out the missing number.

Some of the series can be in the following types.

1. ***Prime Series :*** In which the terms are the prime numbers in order.

   Ex(i): 2, 3, 5, 7, 11, 13, ___.

   Here the terms of the series are the prime numbers in order. The Prime number after 13 is 17.

   So, the answer is 17.

   Ex (ii): 2, 5, 11,17,23, ___.

   This series is by taking the alternative Prime numbers, after 23 the prime numbers are 29 and 31. So, the answer is 31.

పూర్ణ సంఖ్యల ధర్మాలు				
ధర్మము పేరు	పరిక్రియలు			
	సంకలనం	వ్యవకలనం	గుణకారం	భాగహారం
	ఇక్కడ a, b, c ∈ Z			a, b, c లు శూన్యేతర పూర్ణ సంఖ్యలు
సంవృత ధర్మము	$a + b \in Z$	$a - b \in Z$	$a \times b \in Z$	$a \div b \notin Z$
స్థిత్యంతర న్యాయము	$a + b = b + a$	$a - b = b - a$	$a \times b = b \times a$	$a \div b \neq b \div a$
సహచర న్యాయము	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(a - b) - c = a - (b - c)$	$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$	$(a \div b) \div c \neq a \div (b \div c)$
తత్సమ ధర్మము	$a + 0 = a$ $0 + a = a$	వర్తించదు	$a \times 1 = a$ $1 \times a = a$	వర్తించదు
విభాగ న్యాయము	$a \times (b + c) = ab + ac$	$a \times (b - c) = ab - ac$	వర్తించదు	వర్తించదు

- అంకగణిత పరిక్రియలను పూర్తి చేయాల్సిన క్రమాన్ని తెలిపే నియమమే BODMAS నియమము.(బ్రాకెట్స్, ఆఫ్, భాగహారము, గుణకారము, సంకలనము, వ్యవకలనము).
- సంఖ్యా సమాసాల సూక్ష్మీకరణలో బ్రాకెట్స్‌ను **విన్కులం బ్రాకెట్, సాధారణ బ్రాకెట్, కర్లీ బ్రాకెట్, చతురస్ర బ్రాకెట్,** క్రమములో పూర్తిచేయాలి. అనగా [{(—)}] లను లోపలినుండి బయటకు క్రమములో పూర్తిచేయాలి.
- ఒక పూర్ణ సంఖ్య యొక్క సంఖ్యా విలువ (దాని గుర్తును పరిగణన లోకి తీసుకోకుండా)ను దాని యొక్క పరమ మూల్యము అంటారు. ఒక సంఖ్య యొక్క పరమ మూల్యము ఎల్లప్పుడూ రుణాత్మకం కాదు.

సంఖ్యా శ్రేణులు – 1

ఒక ప్రత్యేక నియమము లేదా ప్రత్యేక అమరిక ఆధారంగా ఏర్పడిన సంఖ్యల సమాహారమే సంఖ్యా శ్రేణులు గా పరిగణించవచ్చు. ఒక పదమునకు దాని ముందు పదమునకు మధ్య సంబంధం ఏ విధంగా ఉందో ఆ శ్రేణి లోని అన్ని పదాల మధ్య అదే విధంగా ఉండును. మనం శ్రేణిలోని పదాలు ఏ నియమం ప్రకారం ఏర్పడ్డాయో కనుగొని, ఆ నియమం ఆధారంగా మనకు తెలియని సంఖ్యను కనుగొనాలి.

కొన్ని రకాల శ్రేణులు కింద ఇవ్వబడ్డాయి.

1. ప్రధాన సంఖ్యలు శ్రేణి: ఇందులో ప్రధాన సంఖ్యలు క్రమంలో ఉండును.

ఉదా (i) : 2, 3, 5, 7, 11, 13 ___.

ఈ శ్రేణిలో వరుస ప్రధాన సంఖ్యలు ఉన్నాయి. 13 తర్వాత వచ్చు ప్రధాన సంఖ్య 17.

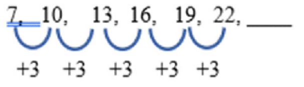
కావున, సమాధానము 17.

ఉదా (ii): 2, 5, 11, 17, 23 ___.

ఈ శ్రేణిలో ప్రత్యామ్నాయ(ఒకటి వదిలి మరొకటి) ప్రధాన సంఖ్యలు ఉన్నాయి. 23 తర్వాత వచ్చు ప్రధాన సంఖ్యలు 29, 31. కావున, సమాధానము 31.

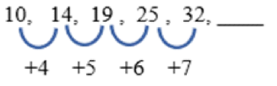
2. ***Addition Series :*** Each number in the series obtained by adding a specific number or series of numbers to previous number.

Ex i) 7, 10, 13, 16, 19, 22, ______



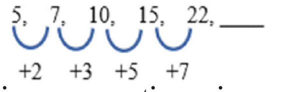
So, the answer is 22 + 3 = 25.

Ex ii) 10, 14, 19, 25, 32, _____



So, the answer is 32 + 8 = 40

Ex iii) 5, 7, 10, 15, 22, ____



Each number in the series obtained by adding consecutive primes. So, the answer is 22 + 11 = 33.

3. ***Fibonacci Series:*** Every third number can be the sum of the preceding two numbers.

Ex i) 3, 5, 8, 13, 21,__

Here starting from third number,

3 + 5 = 8, 5 + 8 = 13, 8 + 13 = 21, So, the answer is 13 + 21 = 34

Ex ii) 6, 10, 16, 26, 42, ____

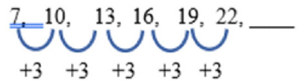
Here starting from third number, 6 + 10 = 16, 10 + 16 = 26, 16 + 26 = 42, So, the answer is 26 + 42 = 68

Practice problems.

1)	12, 19, 26, 33, 40, 47, __	a) 57	b) 54	c) 52	d) 50
2)	2, 13, 24, 35, 46, 57, __	a) 65	b) 67	c) 68	d) 72
3)	61, 67, 71, 73, 79, ___	a) 89	b) 87	c) 85	d) 83
4)	3, 7, 13, 21, 31, ___	a) 43	b) 48	c) 51	d) 53
5)	8, 12, 20, 32, 52, 84, ___	a) 111	b) 126	c) 136	d) 174
6)	23, 28, 38, 53, 73, 98, ___	a) 121	b) 128	c) 135	d) 146
7)	101, 97, 89, 83, 79, 73, 71, ___	a) 61	b) 65	c) 66	d) 67
8)	4, 7, 11, 18, 29, 47, ___	a) 67	b) 76	c) 84	d) 92
9)	76, 187, 298, 409, 520, ___	a) 631	b) 656	c) 701	d) 724
10)	0, 2, 5, 10, 17, 28, 41, ____	a) 50	b) 53	c) 57	d) 58
11)	36, 45, 53, 60, 66, 71, ___	a) 84	b) 78	c) 75	d) 73
12)	0, 15, 45, 90, 150, 225, ___	a) 295	b) 300	c) 315	d) 360
13)	18, 23, 25, 30, 32, 37, ___	a) 43	b) 41	c) 39	d) 38
14)	4, 7, 11, 18, 29, 47,__	a) 71	b) 76	c) 77	d) 82
15)	12, 18, 21, 27, 30, 36, 39,___	a) 43	b) 45	c) 49	d) 52

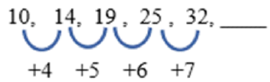
2. **సంకలన శ్రేణి :** ఈ శ్రేణిలో ప్రతి సంఖ్య దాని ముందున్న సంఖ్యకు ఒక ప్రత్యేక సంఖ్య లేదా శ్రేణిని కలుపగా ఏర్పడును.

ఉదా (i): 7,10,13,16,19,22,,....



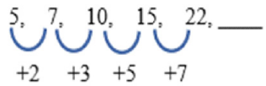
కావున, సమాధానము =22+3 = 25.

ఉదా (ii): 10, 14, 19, 25, 32 ,,....



కావున, సమాధానము = 32+8 = 40

ఉదా (iii): 5,7,10,15,22 ,....



ప్రతి సంఖ్య వరుస ప్రధాన సంఖ్యలను కలుపగా ఏర్పడుచున్నది.కావున, సమాధానము =22 + 11 = 33.

3. **ఫిబోనాకి శ్రేణి:** ఇందులో మూడవసంఖ్య నుండి ప్రతీ సంఖ్య దాని ముందున్న రెండు సంఖ్యల మొత్తముగా ఉండును.

ఉదా (i): 3,5, 8, 13, 21 ,....

ఇక్కడ మూడవ సంఖ్య నుండి,

3+5 = 8, 5 + 8 = 13, 8 + 13 = 21, కావున, సమాధానము =13 +21 =34

ఉదా (ii): 6,10,16,26,42 ,....

ఇక్కడ మూడవ సంఖ్య నుండి,

6+10 = 16, 10 + 16 = 26, 16 + 26 = 42, కావున, సమాధానము = 26 +42 = 68

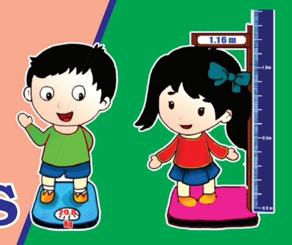
ప్రశ్నలను ప్రాక్టీస్ చేయండి :

Practice problems.

1)	12, 19, 26, 33, 40, 47, __	a) 57	b) 54	c) 52	d) 50
2)	2, 13, 24, 35, 46, 57, __	a) 65	b) 67	c) 68	d) 72
3)	61, 67, 71, 73, 79, ___	a) 89	b) 87	c) 85	d) 83
4)	3, 7, 13, 21, 31, ___	a) 43	b) 48	c) 51	d) 53
5)	8, 12, 20, 32, 52, 84, ___	a) 111	b) 126	c) 136	d) 174
6)	23, 28, 38, 53, 73, 98, ___	a) 121	b) 128	c) 135	d) 146
7)	101, 97, 89, 83, 79, 73, 71, ___	a) 61	b) 65	c) 66	d) 67
8)	4, 7, 11, 18, 29, 47, ___	a) 67	b) 76	c) 84	d) 92
9)	76, 187, 298, 409, 520, ___	a) 631	b) 656	c) 701	d) 724
10)	0, 2, 5, 10, 17, 28, 41, ____	a) 50	b) 53	c) 57	d) 58
11)	36, 45, 53, 60, 66, 71, ___	a) 84	b) 78	c) 75	d) 73
12)	0, 15, 45, 90, 150, 225, ___	a) 295	b) 300	c) 315	d) 360
13)	18, 23, 25, 30, 32, 37, ___	a) 43	b) 41	c) 39	d) 38
14)	4, 7, 11, 18, 29, 47,__	a) 71	b) 76	c) 77	d) 82
15)	12, 18, 21, 27, 30, 36, 39,___	a) 43	b) 45	c) 49	d) 52

Chapter

2 FRACTIONS, DECIMALS AND RATIONAL NUMBERS



Learning Outcomes

The learner is able to

- solve the multiplication and division of fractions in word problems.
- use algorithms to multiply and divide decimals.
- understand the rational numbers.
- represent the rational numbers on number line.
- differentiate fractions and rational numbers.
- solve problems related to daily life situations involving rational numbers.

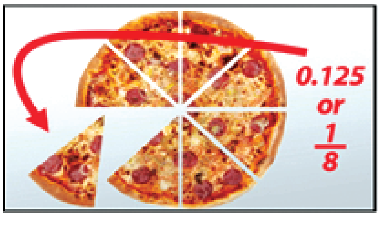
Content Items

2.0 Introduction
2.1 Multiplication and division of fractions in word problems
2.2 Multiplication of decimals
2.3 Division of decimals
2.4 Rational numbers
2.5 Word problems on rational numbers

L9K6E7

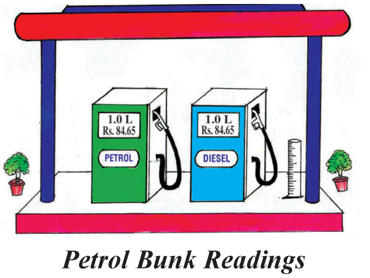
2.0 Introduction :

We know that a part of the whole is a fraction. We have learnt different types of fractions, four fundamental operations on fractions, decimal numbers, addition and subtraction of decimal numbers in previous classes. There are several situations in our daily life, where we use fractions, decimals and rational numbers. Some of the situations are shown in the following pictures :



Piece of pizza

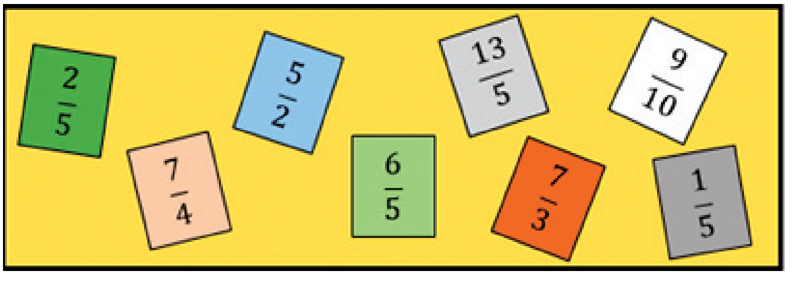
Digital weighing Machine



Petrol Bunk Readings

Let us recall what you have learnt previous classes. Here is a picture containing fractions.

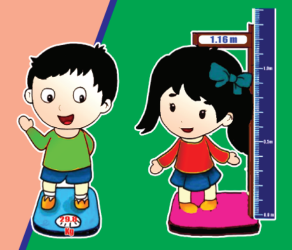
Identify and put a tick mark on like fractions in the picture.



అధ్యాయం

2

భిన్నాలు, దశాంశాలు మరియు అకరణీయ సంఖ్యలు



అభ్యసన ఫలితాలు

అభ్యాసకుడు :

- భిన్నాల గుణకార, భాగహార పద సమస్యలను సాధించగలడు.
- దశాంశాల గుణకార, భాగహారం సమస్యల సాధనలో అల్గారిథమ్‌ను ఉపయోగిస్తాడు.
- అకరణీయ సంఖ్యలను అవగాహన చేసుకుంటాడు.
- అకరణీయ సంఖ్యలను సంఖ్యా రేఖపై గుర్తించగలడు.
- భిన్నాలు మరియు అకరణీయసంఖ్యల భేదం గమనించును
- అకరణీయ సంఖ్యలతో కూడిన నిత్య జీవిత సమస్యలను పరిష్కరించగలడు.

విషయ అంశాలు

2.0 పరిచయం

2.1 భిన్నాల గుణకార, భాగహార పద సమస్యలు

2.2 దశాంశ భిన్నాల గుణకారం

2.3 దశాంశ భిన్నాల భాగహారం

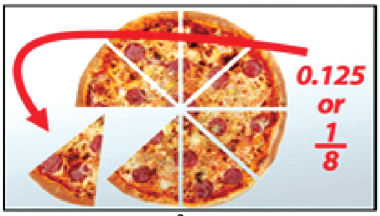
2.4 అకరణీయసంఖ్యలు

2.5 అకరణీయసంఖ్యలపై పద సమస్యలు

E3D4W3

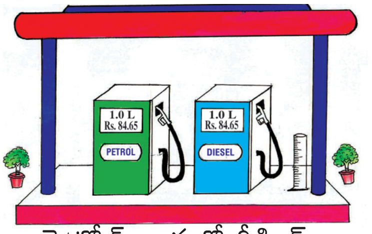
2.0 పరిచయం :

భిన్నం అనగా మొత్తంలో కొంత భాగం అని మనకు తెలుసు. మనం ఇంతకు ముందు తరగతుల్లో విభిన్న రకాల భిన్నాలు, భిన్నాలలో చతుర్విధ పరిక్రియలు, దశాంశ భిన్నాలు, దశాంశ భిన్నాల యొక్క కూడిక మరియు తీసివేతల గురించి నేర్చుకున్నాం. మనదైనందిన జీవితంలో భిన్నాలు, దశాంశాలు ఉపయోగించే సందర్భాలు అనేకం ఉన్నాయి. కొన్ని సందర్భాలు క్రింది చిత్రాలలో చూపించబడ్డాయి.



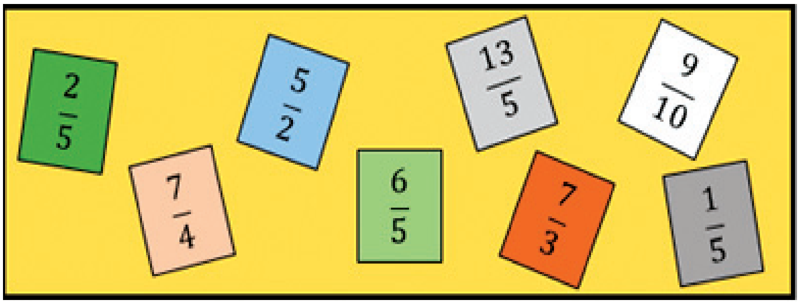
పిజ్జాలో భాగం

బరువును తూచే యంత్రం



పెట్రోల్ బంకులో రీడింగ్

ముందు తరగతిలో నేర్చుకున్న అంశాలను జ్ఞప్తికి తెచ్చుకుందాం.వివిధ రకాల భిన్నాలు కలిగి ఉన్న ఒక చిత్రం ఇక్కడ ఇవ్వబడింది.సజాతి భిన్నాలను గుర్తించి టిక్ చేయండి.



$\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{6}{5}, \frac{13}{5}$ have the same denominator. So, they are like fractions.

$\frac{7}{4}, \frac{5}{3}, \frac{2}{5}, \frac{7}{3}$ have different denominators. So, they are unlike fractions.

Look at the following examples .

Example 1 : Raju used $3\frac{1}{2}$ litres of milk in the morning and $2\frac{1}{2}$ litres of milk in the evening to prepare tea in his hotel. What was the total quanitity of milk he used?

Solution : Milk used in the morning = $3\frac{1}{2} = \frac{7}{2}\, l$

Milk used in the evening = $2\frac{1}{2} = \frac{5}{2}\, l$

Total quantity of milk he used in the hotel $= \frac{7}{2} + \frac{5}{2} = \frac{7+5}{2} = \frac{12}{2} =$ *6 litres*

Example 2 : Subtract $\frac{3}{5}$ from $\frac{7}{2}$.

Solution : $\frac{7}{2} - \frac{3}{5}$ (Are they like fractions? Why?)

$\frac{7}{2}, \frac{3}{5}$ have different denominators. So, they are unlike fractions.

we have to change them into like fractions.

LCM of 2 and 5 is 10.

$\frac{7}{2} = \frac{7 \times 5}{2 \times 5} = \frac{35}{10}$ $\qquad$ $\frac{3}{5} = \frac{3 \times 2}{5 \times 2} = \frac{6}{10}$

$\frac{7}{2} - \frac{3}{5} = \frac{35}{10} - \frac{6}{10} = \frac{35-6}{10} = \frac{29}{10}$

$\therefore \frac{7}{2} - \frac{3}{5} = \frac{29}{10}$

Look at the following example.

Example 3 : Solve the following : i) $\frac{3}{4} \times 1\frac{2}{5}$ ii) $2\frac{2}{3} \div 1\frac{1}{5}$

$\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{6}{5}, \frac{13}{5}$ లు ఒకేహారం కలిగివున్నాయి. కాబట్టి, అవి సజాతి భిన్నాలు.

$\frac{7}{4}, \frac{5}{3}, \frac{2}{5}, \frac{7}{3}$ లు విభిన్న హారాలను కలిగివున్నాయి. కాబట్టి, అవి విజాతి భిన్నాలు.

క్రింది ఉదాహరణలను గమనించండి.

ఉదాహరణ 1: రాజు తన హోటల్లో టీ తయారు చేయడానికి ఉదయం $3\frac{1}{2}$ లీటర్ల పాలు మరియు సాయంత్రం $2\frac{1}{2}$ లీటర్ల పాలు ఉపయోగించాడు. అతడు ఉపయోగించిన మొత్తం పాల పరిమాణం ఎంత ?

సాధన : ఉదయం ఉపయోగించిన పాలు $= 3\frac{1}{2} = \frac{7}{2}$ లీ

సాయంత్రం పూట ఉపయోగించిన పాలు $= 2\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$ లీ

హోటల్లో ఉపయోగించిన మొత్తం పాలు $= \frac{7}{2} + \frac{5}{2} = \frac{7+5}{2} = \frac{12}{2} = 6$ లీటర్లు

ఉదాహరణ 2: $\frac{7}{2}$ నుండి $\frac{3}{5}$ ను తీసివేయండి.

సాధన : $\frac{7}{2} - \frac{3}{5}$ (అవి సజాతి భిన్నాలా? ఎందుకు?)

$\frac{7}{2}, \frac{3}{5}$ లు విభిన్న హారాలను కలిగివున్నాయి. కావున, అవి విజాతి భిన్నాలు.

మనం వాటిని సజాతి భిన్నాలుగా మార్చాల్సి ఉంటుంది.

2 మరియు 5 ల క.సా.గు. 10

$\frac{7}{2} = \frac{7\times5}{2\times5} = \frac{35}{10}$ $\qquad$ $\frac{3}{5} = \frac{3\times2}{5\times2} = \frac{6}{10}$

$\frac{7}{2} - \frac{3}{5} = \frac{35}{10} - \frac{6}{10} = \frac{35-6}{10} = \frac{29}{10}$

$\therefore \frac{7}{2} - \frac{3}{5} = \frac{29}{10}$

క్రింది ఉదాహరణను గమనించండి.

ఉదాహరణ 3: ఈ క్రింది వాటిని సాధించండి. i) $\frac{3}{4}\times1\frac{2}{5}$ ii) $2\frac{2}{3}\div1\frac{1}{5}$

Solution :

i) $\frac{3}{4}\times 1\frac{2}{5}=\frac{3}{4}\times\frac{7}{5}=\frac{3\times 7}{4\times 5}=\frac{21}{20}$

ii) $2\frac{2}{3}\div 1\frac{1}{5}=\frac{8}{3}\div\frac{6}{5}$

$=\frac{8}{3}\times\frac{5}{6}$ (reciprocal of $\frac{6}{5}$ is $\frac{5}{6}$)

$=\frac{8\times 5}{3\times 6}=\frac{40}{18}=\frac{20}{9}=2\frac{2}{9}$

For multiplication of fractions, we simply multiply numerators and multiply denominators. To divide one fraction by another fraction, we have to multiply first fraction with the reciprocal of the second fraction.

Review Exercise

1. Look at the fractions and fill them in the table $\frac{1}{2},\frac{5}{3},\frac{11}{9},\frac{23}{25},\frac{19}{100},\frac{99}{70}$.

Proper fraction	Improper fraction	Convert improper fraction into Mixed fraction
$\frac{1}{2}$	—	—
—	$\frac{5}{3}$	$1\frac{2}{3}$

2. Write the following fractions in ascending order .

i) $\frac{3}{2},\frac{5}{2},\frac{1}{2},\frac{17}{2},\frac{9}{2}$ ii) $\frac{6}{5},\frac{11}{10},\frac{19}{5},\frac{7}{10},\frac{5}{10}$ iii) $\frac{8}{3},\frac{7}{6},3\frac{1}{4},\frac{5}{3},\frac{11}{4}$

3. Solve the following .

i) $\frac{3}{4}+\frac{7}{4}$ ii) $\frac{5}{6}+\frac{7}{12}$ iii) $1\frac{7}{8}-\frac{1}{5}$ iv) $4\frac{1}{2}-3\frac{1}{3}$

4. Simplify the following .

i) $\frac{1}{4}$ of 3 ii) $\frac{5}{8}$ of $\frac{2}{3}$ iii) $\frac{15}{4}\times 2\frac{1}{7}$ iv) $3\frac{1}{3}\times 2\frac{2}{5}$

సాధన :

i) $\frac{3}{4} \times 1\frac{2}{5} = \frac{3}{4} \times \frac{7}{5} = \frac{3 \times 7}{4 \times 5} = \frac{21}{20}$

ii) $2\frac{2}{3} \div 1\frac{1}{5} = \frac{8}{3} \div \frac{6}{5}$

$= \frac{8}{3} \times \frac{5}{6}$ ($\frac{6}{5}$ యొక్క గుణకార విలోమం $\frac{5}{6}$)

$= \frac{8 \times 5}{3 \times 6} = \frac{40}{18} = \frac{20}{9} = 2\frac{2}{9}$

భిన్నాలను గుణించాలంటే, మనం వాటి లవాలను గుణించాలి మరియు వాటి హారాలను గుణించాలి. ఒక భిన్నాన్ని మరో భిన్నంతో భాగించాలంటే మొదటి భిన్నాన్ని, రెండోభిన్నం యొక్క గుణకార విలోమంతో గుణించాల్సి ఉంటుంది.

పునర్విమర్శ అభ్యాసం

1. క్రింది భిన్నాలను గమనించండి మరియు వాటిని పట్టికలోనింపండి. $\frac{1}{2}, \frac{5}{3}, \frac{11}{9}, \frac{23}{25}, \frac{19}{100}, \frac{99}{70}$.

సజాతి భిన్నాలు	విజాతి భిన్నాలు	విజాతి భిన్నాలు మిశ్రమ భిన్నాలుగా మార్చడం
$\frac{1}{2}$	—	—
—	$\frac{5}{3}$	$1\frac{2}{3}$

2. క్రింది భిన్నాలను ఆరోహణ క్రమంలో రాయండి.

i) $\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{1}{2}, \frac{17}{2}, \frac{9}{2}$ ii) $\frac{6}{5}, \frac{11}{10}, \frac{19}{5}, \frac{7}{10}, \frac{5}{10}$ iii) $\frac{8}{3}, \frac{7}{6}, 3\frac{1}{4}, \frac{5}{3}, \frac{11}{4}$

3. క్రింది వాటిని సాధించండి.

i) $\frac{3}{4} + \frac{7}{4}$ ii) $\frac{5}{6} + \frac{7}{12}$ iii) $1\frac{7}{8} - \frac{1}{5}$ iv) $4\frac{1}{2} - 3\frac{1}{3}$

4. క్రింది వాటిని సూక్ష్మీకరించండి.

i) 3 లో $\frac{1}{4}$ వ వంతు ii) $\frac{5}{8}$ లో $\frac{2}{3}$ వ వంతు iii) $\frac{15}{4} \times 2\frac{1}{7}$ iv) $3\frac{1}{3} \times 2\frac{2}{5}$

5. Solve the following :

i) $\frac{3}{4} \div 3$ ii) $8 \div 2\frac{1}{7}$ iii) $\frac{12}{7} \div \frac{2}{7}$ iv) $5\frac{1}{2} \div 2\frac{9}{11}$

2.1 Word problems of multiplication and division on fractions:

We come across in many daily life situations where we need to use fractions. Let us consider some situations.

One day Chandu asked his mother for chapaties for dinner. She prepared 15 chapaties and served $\frac{3}{5}$ of chapaties to Chandu and his sister, $\frac{1}{5}$ of chapaties to Chandu's father. Can you guess how many chapaties remained to Chandu's mother?

Let us find.

Total number of chapaties = 15

No. of chapaties served to Chandu and his sister $= \frac{3}{5}$ of $15 = \frac{3}{5} \times 15 = 9$

No. of chapaties served to Chandu's father $= \frac{1}{5}$ of $15 = \frac{1}{5} \times 15 = 3$

$\therefore$ No. of chapaties remained to Chandu's mother $= 15 - (9 + 3) = 3$

Example 4 : In the school out of 180 students, $\frac{4}{9}$ of the students are boys. Find the number of girls in the school?

Solution : Number of students in the school = 180

Part of the boys in the school $= \frac{4}{9}$

Number of boys $= \frac{4}{9}$ of $180 = \frac{4}{9} \times 180 = 80$

$\therefore$ Number of girls $= 180 - 80 = 100$

5. క్రింది వాటిని సాధించండి.

i) $\frac{3}{4} \div 3$ ii) $8 \div 2\frac{1}{7}$ iii) $\frac{12}{7} \div \frac{2}{7}$ iv) $5\frac{1}{2} \div 2\frac{9}{11}$

2.1 భిన్నాల గుణకార, భాగహార పద సమస్యలు:

మన నిత్య జీవితంలో భిన్నాలను ఉపయోగించవలసిన కొన్ని సందర్భాలను తీసుకుందాం.

చందు ఒకరోజు, రాత్రి భోజనానికి తన తల్లిని చపాతీలు అడిగాడు. ఆమె 15 చపాతీలు తయారు చేసిన వాటిలో $\frac{3}{5}$ వ వంతు చపాతీలు చందు మరియు అతని సోదరికి, $\frac{1}{5}$ వ వంతు చపాతీలు చందు తండ్రికి వడ్డించింది. చందు తల్లికి ఎన్ని చపాతీలు మిగిలినవో ఊహించగలరా?

మనం ఇప్పుడు తెలుసుకుందాం.

మొత్తం చపాతీలు = 15

చందు మరియు అతని సోదరికి వడ్డించిన చపాతీలు $= \frac{3}{5}$ లో 15 వ వంతు $= \frac{3}{5} \times 15 = 9$

చందు తండ్రికి వడ్డించిన చపాతీలు $= \frac{1}{5}$ లో 15 వ వంతు $= \frac{1}{5} \times 15 = 3$

$\therefore$ చందు తల్లికి మిగిలిన చపాతీలు = 15 – (9 + 3) = 3

ఉదాహరణ 4: ఒక పాఠశాలలో 180 మంది విద్యార్థుల్లో $\frac{4}{9}$ వ వంతు విద్యార్థులు బాలురు అయిన ఆ పాఠశాలలోని బాలికల సంఖ్యను కనుగొనండి.

సాధన: పాఠశాలలో విద్యార్థుల సంఖ్య = 180

బాలుర భాగం = $\frac{4}{9}$

మొత్తం విద్యార్థులలో బాలుర సంఖ్య = 180 లో $\frac{4}{9}$ వ వంతు $= \frac{4}{9} \times 180 = 80$

$\therefore$ బాలికల సంఖ్య = 180 – 80 = 100

Example 5 : If the cost of $22\frac{1}{2}$ kg of apples (a box) in a whole sale market is ₹1170, then find the cost of 5kg of apples.

Solution : Cost of $22\frac{1}{2}$ kg of apples = ₹1170

Cost of 1kg of apple = ₹1170 $\div 22\frac{1}{2}$

= ₹1170 $\div \frac{45}{2}$

= ₹1170 $\times \frac{2}{45}$ = ₹52

$\therefore$ Cost of 5kg of apples = $5 \times$ ₹52 = ₹260

Exercise - 2.1

1. In Jagananna Gorumudda (MDM) scheme each student got $\frac{3}{20}$ kg rice per day, find the weight of the rice required for 60 students in a class per day.

2. What is a perimeter of a equilateral triangle, if each side of a triangle is $5\frac{3}{10}$ cm?

3. Surya can walk $\frac{18}{5}$ km in an hour. How much distance will be walk in $2\frac{1}{2}$ hours?

4 If the length and breadth of a rectangular garden are $\frac{27}{2}$ m and $\frac{15}{2}$ m respectively, then find the area of the garden.

5 Gopal bought $3\frac{1}{2}$ kg of potatoes in the market. If he paid ₹84, then find the cost of 1kg of potatoes.

6 A car travelled 225 km in $4\frac{1}{2}$ hours with uniform speed. Find the distance travelled in 1 hour.

7. If 24 students share $4\frac{4}{5}$ kg of cake, then how much cake does each one get?

ఉదాహరణ 5 : ఒక టోకు ధరల దుకాణంలో, పెట్టె లోని $22\frac{1}{2}$ కి.గ్రా ఆపిల్ పండ్ల వెల రూ.1170 అయిన 5 కి.గ్రా. ఆపిల్ పండ్ల వెల కనుక్కోండి.

సాధన : $22\frac{1}{2}$ కి.గ్రా. ఆపిల్ పండ్ల వెల = ₹1170.

1కి.గ్రా. ఆపిల్ పండ్ల వెల = ₹1170 ÷ $22\frac{1}{2}$

= ₹1170 ÷ $\frac{45}{2}$

= ₹ 1170 × $\frac{2}{45}$ = ₹52

∴ ₹5కి.గ్రా. ఆపిల్ పండ్ల వెల = 5 × ₹52 = ₹260

అభ్యాసం - 2.1

1. జగనన్న గోరు ముద్ద (MDM) పథకంలో ఒక్కొక్క విద్యార్థి రోజుకు $\frac{3}{20}$ కిలోల బియ్యం పొందిన, తరగతిలో గల మొత్తం 60 మంది విద్యార్థులకు ఒక రోజుకు కావలిసిన బియ్యం బరువు కనుగొనండి.

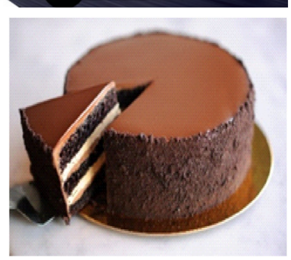
2. ఒక సమబాహు త్రిభుజం యొక్క ప్రతి భుజం $5\frac{3}{10}$ సెం.మీ. అయితే త్రిభుజం యొక్క చుట్టుకొలత ఎంత?

3. సూర్య ఒక గంటలో $\frac{18}{5}$ కిలో మీటర్లు నడవగలడు. $2\frac{1}{2}$ గంటల్లో ఎంత దూరం నడవగలడు?

4. ఒక దీర్ఘచతురస్రాకార తోట పొడవు మరియు వెడల్పులు వరుసగా $\frac{27}{2}$ మీ. మరియు $\frac{15}{2}$ మీ అయిన అప్పుడు ఆ తోట యొక్క వైశాల్యం కనుగొనండి.

5. మార్కెట్లో గోపాల్ $3\frac{1}{2}$ కిలోగ్రాముల బంగాళదుంపలు కొనుగోలు చేశాడు. వాటికి అతడు ₹84 చెల్లించినచో, 1కిలోగ్రాముల బంగాళదుంపల వెల కనుగొనండి.

6. ఒక కారు సమవేగంతో $4\frac{1}{2}$ గంటల్లో 225 కిలోమీటర్లు ప్రయాణించింది. అది ఒక గంటలో ప్రయాణించిన దూరాన్ని కనుగొనండి.



7. 24 మంది విద్యార్థులు $4\frac{4}{5}$ కిలోగ్రాముల కేక్ ను సమానంగా పంచుకుంటే, అప్పుడు ప్రతి ఒక్కరూ ఎంత భాగం కేక్ ను పొందుతారు?

8. A drum contains 210 litres of water. How many times does the boy get the water for watering the plants with $3\frac{1}{2}$ litres of full bucket from the drum?

2.2 Multiplication Decimals :

We have learnt about decimals, addition and subtraction of decimals in the previous class. Let us review on these concepts and then learn multiplication and division of decimals in this class.

The fraction with denominators 10, 100, 1000, 10000, … etc. are decimal fractions or decimal numbers. The fraction $\frac{1}{10}$ can be written as 0.1 in decimal form (read as zero point one). So, decimal number is another way of expression of a fraction.

The place value chart can also be used to understand decimals.

Look at the table below and fill up the blank places.

Decimal Numbers	Hundreds (100)	Tens (10)	Ones (1)	Tenths $\left(\frac{1}{10}\right)$	Hundredths $\left(\frac{1}{100}\right)$	Thousandths $\left(\frac{1}{1000}\right)$
31.402	0	3	1	4	0	2
702.136	7	0		1	3	6
495.834	4		5	8		4
520.301	5	2	0			1
	0	7	2	1	8	8

We can also write these decimal numbers in expanded form. Look at the following example from the table $31.402 = 30 + 1 + \frac{4}{10} + \frac{0}{100} + \frac{2}{1000}$.

Place value of 4 in 31.402 is $\frac{4}{10}$

Similarly, we can write expand form to the remaining decimals.

Let us see how to add or subtract decimals. We have learnt that, the decimal numbers are written one under the other with the decimal points lined up. Add or subtract as you would do to whole numbers, then, place the decimal place in the result in line with the other decimal points.

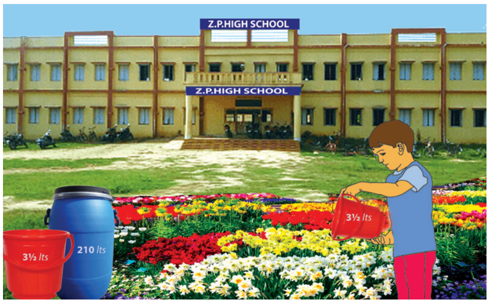
i) 356.24 + 65.08

$$\begin{array}{r} 356.24 \\ +\ \ 65.08 \\ \hline 421.32 \\ \hline \end{array}$$

ii) 67.29 – 35.91

$$\begin{array}{r} 67.29 \\ -\ 35.91 \\ \hline 31.38 \\ \hline \end{array}$$

8. ఒక డ్రమ్ లో 210 లీటర్ల నీరు కలదు. మొక్కలకు నీరు పోయుటకు బాలుడు $3\frac{1}{2}$ లీటర్ల సామర్థ్యం గల నిండు బక్కెట్టుతో ఆ డ్రమ్ నుంచి ఎన్ని సార్లు నీటిని పొందగలడు?



2.2 దశాంశ భిన్నాల గుణకారం

మనం ఇంతకు ముందు తరగతిలో దశాంశ భిన్నాలు, దశాంశాల కూడిక మరియు తీసివేతల గురించి తెలుసుకున్నాం. ఈభావనలను మనం సమీక్షించిన తరువాత దశాంశాల గుణకారం మరియు భాగహారం గురించి ఈ తరగతిలో తెలుసుకుందాం.

10, 100, 1000, 10000,... మొదలైనవి హారంగా గల భిన్నాలను దశాంశ భిన్నాలు లేదా దశాంశ సంఖ్యలు అంటారు. $\frac{1}{10}$ అనే భిన్నాన్ని 0.1గా దశాంశ రూపంలో రాయవచ్చు (సున్నా పాయింట్ ఒకటిగా చదవుతాం). కనుక దశాంశంను, భిన్నం యొక్క మరో రూపంగా వ్యక్త పరుస్తాము. దశాంశ సంఖ్యలను అర్థం చేసుకోవడం కొరకు స్థాన విలువ పట్టికను ఉపయోగించవచ్చు.

దిగువ పట్టికను గమనించి ఖాళీలను పూరించండి.

దశాంశ సంఖ్యలు	వందలు (100)	పదులు (10)	ఒకట్లు (1)	దశాంశాలు $\left(\frac{1}{10}\right)$	శతాంశాలు $\left(\frac{1}{100}\right)$	సహస్రాంశాలు $\left(\frac{1}{1000}\right)$
31.402	0	3	1	4	0	2
702.136	7	0		1	3	6
495.834	4		5	8		4
520.301	5	2	0			1
	0	7	2	1	8	8

ఈ దశాంశ సంఖ్యలను మనం విస్తరణ రూపంలో కూడా రాయవచ్చు. పట్టిక నుంచి దిగువ ఉదాహరణను గమనించండి.

$$31.402 = 30 + 1 + \frac{4}{10} + \frac{0}{100} + \frac{2}{1000}.$$

31.402 లో 4 యొక్క స్థాన విలువ $\frac{4}{10}$

అదే విధంగా, మనం మిగిలిన దశాంశ సంఖ్యలను విస్తరణ రూపంలో రాయవచ్చు.

దశాంశాలను మనం సంకలనం మరియు వ్యవకలనం చేయడం ఎలానో చూద్దాం. పూర్ణాంకాల లో సంకలనం, వ్యవకలనం చేసినట్లే, దశాంశ సంఖ్యలను కూడా దశాంశ బిందువుల వరుసలో ఒకదాని కింద ఒకటి వుండే విధంగా వ్రాసి, దశాంశ బిందువును అదే వరుసలో సమాధానం లో కూడా ఉంచాలి.

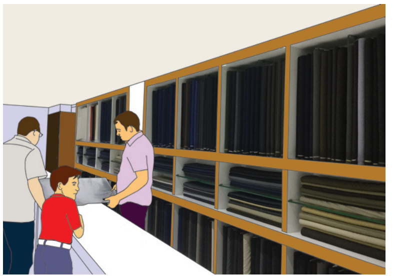
i) 356.24 + 65.08

$$\begin{array}{r} 356.24 \\ +\ 65.08 \\ \hline 421.32 \\ \hline \end{array}$$

ii) 67.29 – 35.91

$$\begin{array}{r} 67.29 \\ -\ 35.91 \\ \hline 31.38 \\ \hline \end{array}$$

Let us consider a daily life situation



Dheeraj of 7th class went to the market with his father to purchase a cloth for stitching of shirts. If 1.5 metre cloth is needed to each shirt, then how much cloth is required for 3 shirts?

To find this, we need to understand multiplication of decimals. There are many situations in real life where we need to multiply decimal numbers.

Let us learn multiplication of decimals in 3 methods.

2.2.1 Multiplication of Decimal number with Whole number :

Method - 1: (Converting decimal in to a fraction)

$$3 \times 1.5$$

$$= 3 \times \frac{15}{10}$$

$$= \frac{45}{10}$$

$$= 4.5$$

Method – 2 : (Multiply and put decimals)

$$3 \times 1.5$$

Step 1 : Multiply whole numbers ignoring decimals. $3 \times 15 = 45$

Step 2 : Then mark the decimal point to the product from right most to left according to the number of decimal places in the given decimal. Here only one decimal place is there.

$\therefore$ $3 \times 1.5 = 4.5$

Method - 3 : (Pictorial representation)

$$3 \times 1.5$$

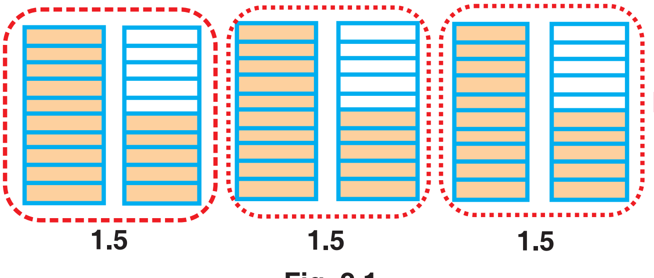
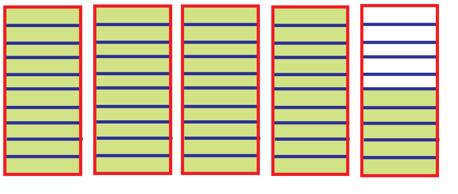


Fig. 2.1



4.5

Fig. 2.2

Each 1.5 decimal represents 1 whole and 5tenths $\left(\frac{5}{10}\right)$ parts. So, the shaded region shows 3×1.5 in Fig. 2.1. We know that repeated addition is multiplication. Hence in adding of three 1.5 decimals, we get 4 whole and one 0.5 decimal part (Fig.2.2)

$$\therefore 3 \times 1.5 = 4.5$$

Example 6 : If one side of a square is 3.8 cm, then find its perimeter?

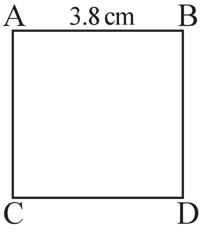
Solution : Number of sides to a square = 4

Each side of a square is equal.

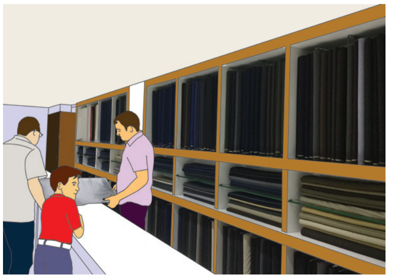
Side of a square = 3.8 cm

$\therefore$ Perimeter of a square = $4 \times$ side

$= 4 \times 3.8 = 15.2$ cm



మన నిత్య జీవితంలో ఒక సందర్భాన్ని తీసుకుందాము.



7వతరగతి చదువుతున్న ధీరజ్ తన తండ్రితో కలిసి చొక్కాలు కొనుగోలు చేసేందుకు మార్కెటుకు వెళ్లాడు. ప్రతి చొక్కాకు 1.5 మీటర్ల బట్ట అవసరం అయితే, 3 చొక్కాలకు ఎంత బట్ట అవసరం అవుతుంది?

దీనిని కనుగొనడం కొరకు, దశాంశాల గుణకారాన్ని అర్థం చేసుకోవాలి. నిత్యజీవితంలో దశాంశ భిన్నాలు గుణకారం చేయవలసిన సందర్భాలు అనేకం ఉంటాయి. దశాంశాలను 3 పద్ధతులలో గుణించడాన్ని మనం నేర్చుకుందాం.

2.2.1 పూర్ణాంకం తో దశాంశ భిన్నాల గుణకారం:

పద్ధతి 1: (దశాంశాన్ని భిన్నంగా మార్చడం)

3×1.5

$= 3 \times \frac{15}{10}$

$= \frac{45}{10}$

$= 4.5$

పద్ధతి 2: (గుణించి, దశాంశ బిందువును పెట్టుట)

3×1.5

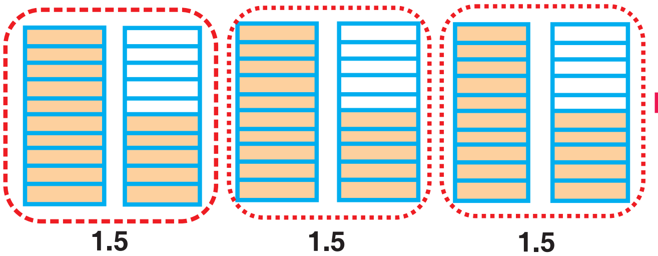
సోపానం 1: దశాంశ బిందువుతో సంబంధం లేకుండా పూర్ణసంఖ్యలను గుణించండి.

$3 \times 15 = 45$

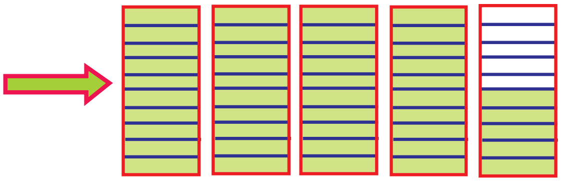
సోపానం 2: ఇవ్వబడ్డ దశాంశాలలో, దశాంశ స్థానాల సంఖ్యకు అనుగుణంగా, కుడివైపు నుంచి ఎడమకు దశాంశ బిందువును గుర్తించండి. ఇక్కడ కేవలం ఒక దశాంశ స్థానం మాత్రమే ఉంది. $\therefore 3 \times 1.5 = 4.5$

పద్ధతి 3: (పటరూప పద్ధతి)

3×1.5



పటం 2.1



పటం 2.2

ప్రతి 1.5 దశాంశం 1 సంపూర్ణ మరియు 5 దశాంశ $\left(\frac{5}{10}\right)$ భాగాలను కలిగి వుంది. పటం 2.1 లో 3×1.5 ని షేడ్ చేయబడిన ప్రాంతం చూపుతుంది. పునారవృత సంకలనం గుణకారం అని మనకు తెలుసు. అందువల్ల మూడు 1.5 దశాంశాలను కలపగా మనకు 4 పూర్తి భాగాలు మరియు ఒక 0.5 దశాంశ భాగం లభిస్తుంది. (పటం 2.2)

$$\therefore 3 \times 1.5 = 4.5$$

ఉదాహరణ 6 : ఒక చతురస్రం యొక్క భుజం 3.8సెం.మీ. అయితే, దాని చుట్టుకొలతను కనుగొనండి.

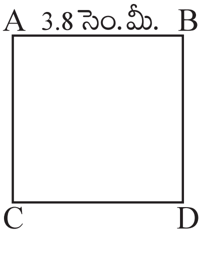
సాధన : చతురస్రానికి భుజాల సంఖ్య = 4

చతురస్రం యొక్క ప్రతి భుజం సమానం.

చతురస్రం యొక్క భుజం = 3.8 సెం.మీ.

$\therefore$ చతురస్రం యొక్క చుట్టుకొలత = 4 × భుజం

= 4 × 3.8 = 15.2 సెం.మీ.



Check Your Progress

Find the product:

1) 32.5 × 8 **2) 94.62 × 7** **3) 109.761 × 31** **4) 61 × 2.39**

2.2.2. Multiplication of decimal with 10, 100, 1000 …

You may wonder, if you know what would happen, if a decimal number is multiplied by 10, 100, 1000…etc.

Let us consider the following multiplications. we can observe some patterns here.

- $24.183 \times 10 = \frac{24183}{1000} \times 10 = \frac{24183}{100} = 241.83$
- $24.183 \times 100 = \frac{24183}{1000} \times 100 = \frac{24183}{10} = 2418.3$
- $24.183 \times 1000 = \frac{24183}{1000} = 1000 = \frac{24183}{1} = 24183$

If we multiply a decimal number by 10 then we shift the decimal point 1 place to the right in the product. **Eg :** 12.56 × 10 = 125.6

If we multiply a decimal number by 100 then we shift the decimal point 2 places to the right in the product **Eg :** 12.56 × 100 = 1256.0 = 1256

If we multiply a decimal number by 1000 then we shift the decimal point 3 places to the right in the product **Eg :** 12.56 × 1000 = 12560.0 = 12560

To multiply decimal numbers by 10, 100, 1000... just shift the decimal point in the product as many places to the right, as number of zeroes after 1.

Example 7 : Find i) 239.27 × 10 ii) 5.305 × 100 iii) 23.1 × 1000

Solution : i) 239.27 × 10 (number of zeroes in 10 is one. So, decimal point has to shift to one place right in the product).

∴ 239.27 × 10 = 2392.7

ii) 5.305 × 100 = 530.5

iii) 23.1 × 1000 = 23100.0

= 23100

Check Your Progress

1) Find 27.35 × 10

27.35 × 100

27.35 × 1000

2) Find the values of the following .

i) 26.59 × 10 ii) 206.5 ×100 iii) 206.5 × 1000 iv) 10.001 × 1000

నీ ప్రగతిని తెలుసుకో

లబ్ధాన్ని కనుగొనండి:

1) 32.5×8 2) 94.62×7 3) 109.761×31 4) 61×2.39

2.2.2. 10, 100, 1000 మొదలగు వాటితో దశాంశాల గుణకారం:

ఒక దశాంశ సంఖ్యను 10, 100, 1000, ... మొదలైన వాటితో గుణించబడినపుడు ఏమి జరుగుతుందో తెలిస్తే ఆశ్చర్యంగా అనిపిస్తుంది.

ఈ క్రింది గుణకారాన్ని పరిశీలిద్దాం. ఇక్కడ మనం కొన్ని అమరికలను పరిశీలించవచ్చును.

➢ $24.183 \text{ x } 10 = \frac{24183}{1000} \times 10 = \frac{24183}{100} = 241.83$

➢ $24.183 \text{ x } 100 = \frac{24183}{1000} \times 100 = \frac{24183}{10} = 2418.3$

➢ $24.183 \text{ x } 1000 = \frac{24183}{1000} = 1000 = \frac{24183}{1} = 24183$

దశాంశ సంఖ్యను 10తో గుణించినప్పుడు, మనం దశాంశ బిందువు ఒక స్థానాన్ని కుడివైపుకు మారుస్తాం.

ఉదా : $12.56 \times 10 = 125.6$

దశాంశ సంఖ్యను 100తో గుణించినప్పుడు, దశాంశ బిందువు 2 స్థానాలను కుడి వైపుకు మారుస్తాం.

ఉదా : $12.56 \times 100 = 1256.0 = 1256$

ఒక దశాంశ సంఖ్యను 1000తో గుణించినప్పుడు, మనం దశాంశ బిందువు మూడు స్థానాలను కుడి వైపుకు మారుస్తాం. **ఉదా:** $12.56 \times 1000 = 12560.0 = 12560$

> దశాంశసంఖ్యలను10, 100, 1000,.... మొదలైన వాటితో గుణించాలంటే 1 తరువాత సున్నాల సంఖ్యకు సమాన సంఖ్యలో దశాంశ బిందువును కుడివైపుకు మారుస్తాం.

ఉదాహరణ 7: i) 239.27×10 ii) 5.305×100 iii) 23.1×1000 లను కనుగొనండి.

సాధన :

i) 239.27×10 (10 లో సున్నాల సంఖ్య = 1. అందువల్ల, దశాంశ బిందువును కుడివైపుకు ఒక స్థానానికి మార్పు చేయబడుతుంది)

$\therefore 239.27 \times 10 = 2392.7$

ii) 5.305×100

$\therefore 5.305 \times 100 = 530.5$

iii) 23.1×1000

$\therefore 23.1 \times 1000 = 23100.0$

$= 23100$

నీ ప్రగతిని తెలుసుకో

1) 27.35×10

27.35×100

27.35×1000 లను కనుగొనండి.

2. క్రింది విలువలను కనుగొనండి.

i) 26.59×10 ii) 206.5×100 iii) 206.5×1000 iv) 10.001×1000

2.2.3. Multiplication of two decimal numbers:

Let us find multiplication of any to decimals. Eg. 0.4×0.3

Method 1: (Converting decimal into a fraction)

$$0.4 \times 0.3 = \frac{4}{10} \times \frac{3}{10} = \frac{4 \times 3}{10 \times 10} = \frac{12}{100} = 0.12$$

$\therefore 0.4 \times 0.3 = 0.12$

Method 2 : (Multiply and put decimals)

0.4×0.3

0.4 ($\leftarrow$ 1decimal place)

$\times\, 0.3$ ($\leftarrow$ 1decimal place)

Step 1 : Multiply whole numbers ignoring decimal points. $4 \times 3 = 12$

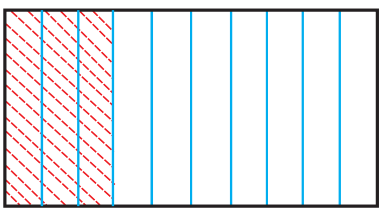
Step 2 : Mark the decimal point in the product from right most to left according to the total number of decimal places of the given numbers. Here it is two.

Hence, $0.4 \times 0.3 = 0.12$ ($\leftarrow$ 2 decimal places)

Method 3: (Pictorial representation)

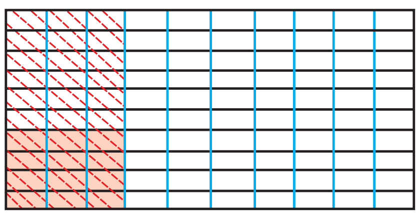
0.4×0.3

Let us find the product pictorially in Fig 2.3 and 2.4.



0.3

Fig. 2.3



0.12

Fig. 2.4

We know that $0.4 \times 0.3 = \frac{4}{10} \times \frac{3}{10}$ (or) $\frac{4}{10}$ of $\frac{3}{10}$

Pictorially $\frac{4}{10}$ of $\frac{3}{10} = \frac{12}{100}$

We divide rectangle into ten equal parts and shade three parts out of it, to get $\frac{3}{10}$ (or) 0.3 (Fig.2.3). Again divide each of these three equal parts into ten equal parts horizontally and take four from each of it.

Now, we get $\frac{4}{10}$ of $\frac{3}{10}$ (or) 0.3×0.4.

Since, there are 12 double shaded parts out of 100, they represent 0.12 (Fig.2.4).

$\therefore 0.4 \times 0.3 = 0.12$

2.2.3 రెండు దశాంశాల గుణకారం:

ఏవైనా రెండు దశాంశాల యొక్క గుణకారం గురించి మనం తెలుసుకుందాం. ఉదా: 0.4 × 0.3

పద్ధతి 1 : (దశాంశాన్ని భిన్నంగా మార్చడం)

0.4 × 0.3

$$0.4 \times 0.3 = \frac{4}{10} \times \frac{3}{10} = \frac{4 \times 3}{10 \times 10} = \frac{12}{100} = 0.12$$

$\therefore$ 0.4 × 0.3 = 0.12

పద్ధతి 2 : (గుణించి, దశాంశ బిందువును పెట్టే పద్ధతి)

0.4 × 0.3

0.4 (← 1దశాంశ స్థానం)

× 0.3 (←1దశాంశ స్థానం)

సోపానం 1: దశాంశ బిందువులను పట్టించుకోకుండా పూర్ణసంఖ్యలను గుణించడం. 4 × 3 = 12

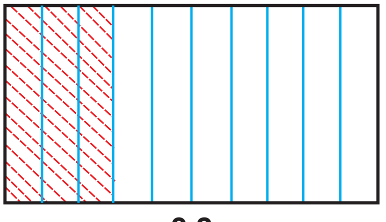
సోపానం 2: ఇవ్వబడ్డ సంఖ్యల యొక్క దశాంశస్థానాల సంఖ్యకు అనుగుణంగా కుడివైపు నుంచి ఎడమవైపుకు దశాంశ బిందువును గుర్తించండి. ఇక్కడ రెండు దశాంశాలు (1+1) ఉన్నాయి.

అందువల్ల 0.4 × 0.3 = 0.12 (←2 దశాంశస్థానాలు)

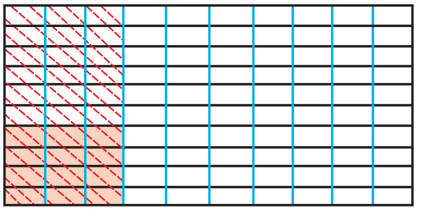
పద్ధతి 3: (పటరూప పద్ధతి)

0.4 × 0.3

పటం 2.3 మరియు 2.4 లలో 0.4, 0.3 ల లబ్ధాన్ని చిత్రపటంలో చూపినట్లు కనుగొందాం.



0.3
పటం 2.3



0.12
పటం 2.4

$0.4 \times 0.3 = \frac{4}{10} \times \frac{3}{10}$ (లేదా) $\frac{3}{10}$ లో $\frac{4}{10}$ అని మనకు తెలుసు.

చిత్రపరంగా $\frac{3}{10}$ లో $\frac{4}{10} = \frac{12}{100}$

మనం దీర్ఘచతురస్రాన్ని పది సమాన భాగాలుగా విభజించాం మరియు $\frac{3}{10}$ (లేదా) 0.3 పొందడం కొరకు మూడు భాగాలను షేడ్‌చేసాం(పటం2.3). ఈ మూడు సమాన భాగాలను క్షితిజ సమాంతరంగా పది సమాన భాగాలుగా విభజించి, ప్రతి దాని నుంచి నాలుగు భాగాలు $\frac{4}{10}$ తీసుకొందాం.

ఇప్పుడు, మనకు 0.3 × 0.4 (లేదా) $\frac{3}{10}$ లో $\frac{4}{10}$ లభిస్తుంది.

100 భాగాలులో 12 ఉమ్మడిగా షేడ్ చేసిన భాగాలున్నాయి కనుక, అవి 0.12 కు ప్రాతినిధ్యం వహిస్తాయి (పటం 2.4).

$$\therefore 0.4 \times 0.3 = 0.12$$

Example 8 : Bindu went to vegetable market with her mother to buy onions. If the cost of Onions is ₹18.50 per kg, then find the cost of 3.5 kg of Onions.

Solution : Cost of 1 kg Onions = ₹18.50

Cost of 3.5 kg of Onions = 3.5 × ₹18.50

(1decimal place) (2 decimal places)

= 64.750

∴ Cost of 3.5 kg of Onions = ₹64.75

Step-1: Multiply whole numbers ignoring decimals 35 × 1850 = 64750
Step-2: As there are total (1 + 2) 3 decimals, put decimal point after three digits from the right most to the product.
So, 3.5 × 18.50 = 64.750

Example 9 : One day Karthik went to petrol bunk to fill petrol in his car. If the cost of petrol is ₹83.21 per litre, then how much he has to pay to fill the full tank with 36.2 litres?

Solution : Cost of 1 litre petrol = ₹83.21

Cost of 36.2 litre petrol = 36.2 × ₹83.21

= ₹3012.202

∴ Cost of 36.2 litres of petrol = ₹3012.20 (rounded to two decimals). (Why?)

The number of decimal digits in the product of any two decimal numbers is equal to the sum of decimal digits that are multiplied.

Check Your Progress

Find the product of the following.

i) 69.2 × 2.5 ii) 20.61 × 3.09 iii) 658.321 × 43.2 iv) 206.005 × 0.07

Let's Do Activity

Here is an activity to multiply two decimals using grid. Cardboard, white chart paper, ruler, pencil, fevicol, sketch pens of different colours are needed.

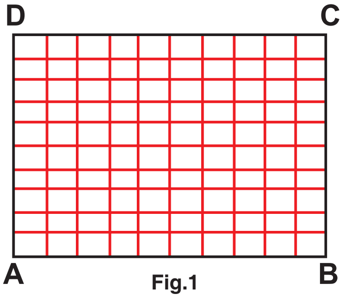


Fig.1

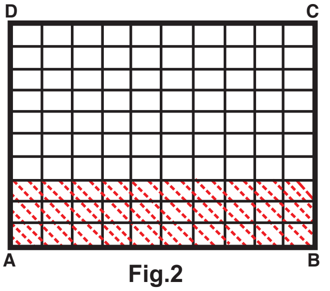


Fig.2

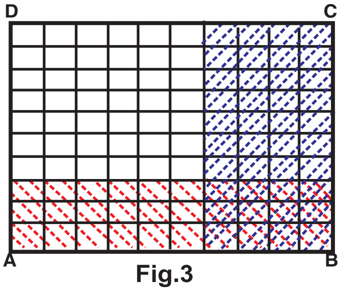


Fig.3

1. Take a cardboard of convenient size and paste a white chart on it.
2. Make 10 x 10 grids on it and label the corners of the grid as A, B, C and D as shown in Fig.1

ఉదాహరణ 8: ఉల్లిపాయలు కొనుగోలు చేయడానికి బిందు తన తల్లితో కలిసి కూరగాయల మార్కెట్‌కు వెళ్లింది. ఉల్లిపాయల ధర కిలోకు ₹18.50 అయితే, 3.5 కిలోగ్రాముల ఉల్లిపాయల యొక్క ధర కనుగొనండి.

సాధన: 1 కిలోగ్రాముల ఉల్లిపాయల ధర = ₹18.50

3.5 కిలోగ్రాముల ఉల్లిపాయల ధర = 3.5 × ₹ 18.50

(1దశాంశ స్థానం) (2 దశాంశ స్థానాలు)

= 64.750

> **సోపానం-1:** దశాంశ బిందువుతో సంబంధం లేకుండా పూర్ణసంఖ్యలను గుణించండి .
> 35 × 1850 = 64750
> **సోపానం-2:** ఇవ్వబడిన సంఖ్యల దశాంశ స్థానాలు 1+2 = 3 కనుక లబ్దంనకు కుడి వైపు నుండి ఎడమ వైపుకు మూడు స్థానాల తర్వాత దశాంశ బిందువును గుర్తించండి.
> 3.5 × 18.50 = 64.750

∴ 3.5 కిలోగ్రాముల ఉల్లిపాయల ధర = ₹ 64.75

ఉదాహరణ 9: ఓ రోజు కార్తీక్ తన కారులో పెట్రోల్ నింపడానికి పెట్రోల్ బంక్‌కు వెళ్లాడు. పెట్రోల్ ధర ప్రతీ లీటరుకు ₹ 83.21 అయితే, 36.2 లీటర్లతో ఫుల్ ట్యాంక్ నింపడం కొరకు అయ్యే ఖర్చును కనుగొనండి?

సాధన: 1 లీటర్ పెట్రోల్ ధర = ₹83.21

36.2 లీటర్ల పెట్రోల్ ధర = 36.2 × ₹ 83.21

= ₹ 3012.202

∴ 36.2 లీటర్ల పెట్రోల్ ధర = ₹ 3012.20 (రెండు దశాంశాలుకు సవరణ చేయబడింది). ఎందుకు?

> *రెండు దశాంశ సంఖ్యలను గుణించినపుడు లబ్ధంలో దశాంశ స్థానాల సంఖ్య, గుణించబడిన సంఖ్యల దశాంశ స్థానాల సంఖ్యల మొత్తానికి సమానం.*

నీ ప్రగతిని తెలుసుకో

క్రింద లబ్దాలను కనుగొనండి.

i) 69.2 × 2.5 ii) 20.61 × 3.09 iii) 658.321 × 43.2 iv) 206.005 × 0.07

ఇది చేద్దాం! కృత్యం

గ్రిడ్ పేపర్ ను ఉపయోగించి రెండు దశాంశాలను గుణకారం చేయడానికి కృత్యము. ఈ కృత్యం చేయడానికి కార్డ్ బోర్డ్, తెలుపు రంగు చార్ట్ పేపర్, రూలర్, పెన్సిల్, ఫెవికాల్, విభిన్న రంగుల్లో స్కెచ్ పెన్నులు అవసరం అవుతాయి.

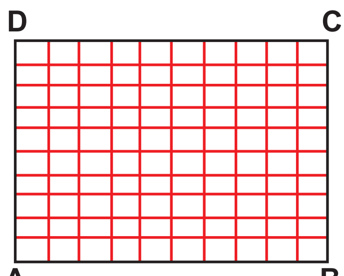


Fig.1

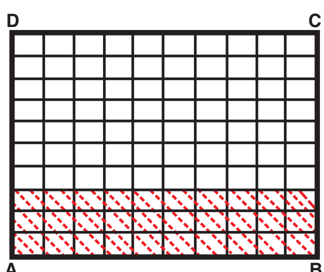


Fig.2

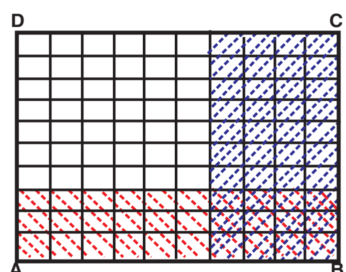


Fig.3

1. తగిన కొలతలతో ఒక అట్టముక్కను తీసుకొని దానిపై తెల్లని చార్టును అతికించండి.
2. 10 × 10 గ్రిడ్లను దానిపై గీయండి మరియు పటం-1లో చూపించిన విధంగా గ్రిడ్ యొక్క శీర్షాలను A, B, C మరియు D అని గుర్తించండి.

3. Shade three horizontal strips using a sketch pen say, red colour starting from the bottom as shown in Fig.2. The portion shaded in red colour (horizontal strips) represents $\frac{3}{10} = 0.3$

4. Shade four vertical strips using a sketch pen say, blue colour starting from right most corner as shown in Fig.3. The portion shaded in blue colour (vertical strips) represents $\frac{4}{10} = 0.4$

5. In Fig.3 portion shaded both in red and blue colours represents $\frac{12}{100} = 0.12$,

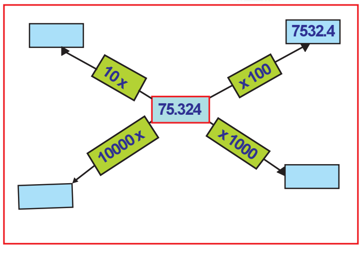
   thus, $0.3 \times 0.4 = 0.12$

6. Repeat this activity by taking different numbers of horizontal and vertical strips to represent the product of the pairs of decimals such as 0.5×0.6 and 0.2×0.8 etc.

I am a decimal number, who is half of one fourth of 100. Who am I?

Let's Explore

Observe the figure. Fill the blue boxes with suitable decimal numbers.



Exercise - 2.2

1. Find the product of the following.

   i) 23.4×6 ii) 681.25×9 iii) 53.29×14 iv) 8×2.52 v) 25×2.013

2. Fill the blanks in the table.

Multiplications	Product
36.21 × 10	362.1
23.104 × 100	______ □
6.24 × ______	6240.0
______ × 1000	21.05
9.234 × 100	______
1.3004 × ______	1300.4
______ × 10	59.001

3. Find the product.

   i) 5.1×8.1 ii) 63.205×0.27 iii) 1.321×0.9 iv) 6.51×0.99 v) 837.6×0.006

3. మూడు క్షితిజ సమాంతర పట్టీలను, పటం-2 లో చూపిన విధంగా గీచి దిగువ నుంచి ఎరుపు రంగులో షేడ్ చేయండి. షేడ్ చేయబడిన భాగం (క్షితిజ సమాంతర పట్టీలు) $\frac{3}{10} = 0.3$ కు ప్రాతినిధ్యం వహిస్తుంది.

4. పటం-3 లో చూపిన విధంగా కుడి వైపు నుండి నీలం రంగు స్కెచ్ పెన్ ఉపయోగించి నాలుగు నిలువు పట్టీలను షేడ్ చేయండి. నీలం రంగు లో షేడ్ చేయబడిన భాగం (నిలువు పట్టీలు) $\frac{4}{10} = 0.4$ కు ప్రాతినిధ్యం వహిస్తుంది.

5. పటం-3 లో ఎరుపు మరియు నీలం రంగులలో $\frac{12}{100} = 0.12$ నకు ప్రాతినిధ్యం వహిస్తుంది.

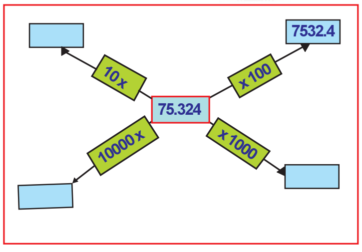
ఆ విధంగా $0.3 \times 0.4 = 0.12$

6. 0.5×0.6 మరియు 0.2×0.8 వంటి దశాంశ జతల లబ్ధం తెలుసుకోనుటకు క్షితిజ సమాంతర మరియు నిలువు పట్టీల యొక్క విభిన్న సంఖ్యలను తీసుకొని ఈ కృత్యాన్ని పునరావృతం చేయండి.

నేనొక దశాంశ సంఖ్యను. 100లో నాలుగో వంతులో సగంగా వుంటాను. నేను ఎవరు?

అన్వేషిద్దాం

పటం గమనించండి. తగిన దశాంశ సంఖ్యలతో నీలం గడులను నింపండి.



అభ్యాసం - 2.2

1. క్రింది వాటి లబ్ధాన్ని కనుగొనండి.

i) 23.4×6 ii) 681.25×9 iii) 53.29×14 iv) 8×2.52 v) 25×2.013

2. పట్టికలో ఖాళీలను నింపండి.

గుణకారం	లబ్ధం
36.21×10	362.1
23.104×100	______
$6.24 \times$ ______	6240.0
______ $\times 1000$	21.05
9.234×100	______
$1.3004 \times$ ______	1300.4
______ $\times 10$	59.001

3. లబ్ధాన్ని కనుగొనండి.

i) 5.1×8.1 ii) 63.205×0.27 iii) 1.321×0.9 iv) 6.51×0.99 v) 837.6×0.006

4. Rithesh reads a book for 2.5 hours everyday. If he reads the entire book in a Week, then how many hours all together are required for him read to the book?

5. Find the area of the rectangle whose length and breadth are 5.3cm, 2.7cm respectively.
6. If the cost of each cement bag is ₹326.50, then find the cost of 24 bags of cement.
7. Dharmika purchased chudidhar material of 1.40m at the rate of ₹152.5per metre. Find the amount to be paid.

8. If a picture chart costs ₹4.25. Amrutha wants to buy 16 charts to make an album. How much money does she has to pay?

2.3 Division of Decimals :

Sujatha wants to decorate her class room with coloured paper strips each of 2.25m length. If she has a coloured paper strip roll of 13.5m length, how many pieces of paper strips of required length will she get from the strip roll? Sujatha expressed it as 13.5 ÷ 2.25.

Hence, we have to understand how to divide decimal numbers. There are many situations in real life where we need to divide decimal numbers.

2.3.1 Division of Decimal numbers by 10, 100, 1000, ... etc.

Let us observe the following patterns .

1) $23.5 \div 10 = \dfrac{235}{10} \div \dfrac{10}{1} = \dfrac{235}{10} \times \dfrac{1}{10} = \dfrac{235\times1}{10\times10} = \dfrac{235}{100} = 2.35$

2) $23.5 \div 100 = \dfrac{235}{10} \div \dfrac{100}{1} = \dfrac{235}{10} \times \dfrac{1}{100} = \dfrac{235\times1}{10\times100} = \dfrac{235}{1000} = 0.235$

3) $23.5 \div 1000 = \dfrac{235}{10} \div \dfrac{1000}{1} = \dfrac{235}{10} \times \dfrac{1}{1000} = \dfrac{235\times1}{10\times1000} = \dfrac{235}{10000} = 0.0235$

Like this, you may fill the following blanks .

169.28 ÷ 10 = 16.928	*525.9 ÷ 10 =_____*
169.28 ÷ 100 = 1.6928	*525.9 ÷ 100 = _____*
169.28 ÷ 1000 = _____	*525.9 ÷ 1000 = _____*

While dividing a decimal number by 10 or 100 or 1000 or ... the digits of the number and the digits of quotient are same, but the decimal point in the quotient shifts to the left by as many places as there are zeros after 1.

Check Your Progress

Find the following.
i) 81.5 ÷ 10 ii) 4901.2 ÷ 100 iii) 7301.3 ÷ 1000 iv) 1.2 ÷ 100

4. రితేష్ ప్రతిరోజూ రెండున్నర గంటలపాటు ఒక పుస్తకాన్ని చదువుతాడు. ఒక వారం లో ఆ పుస్తకంను అతను పూర్తిగా చదివితే, మొత్తం ఎన్ని గంటలు చదివాడు?

5. పొడవు మరియు వెడల్పులు వరుసగా 5.3 సెం.మీ. మరియు 2.7 సెం.మీ గా ఉన్న దీర్ఘచతురస్రం యొక్క వైశాల్యం కనుగొనండి.

6. ఒక సిమెంట్ బస్తా ధర ₹326.50 అయినచో 24 బ్యాగుల సిమెంట్ బస్తాల ధర ను కనుగొనండి.

7. ధార్మిక చుడిధార్ మెటీరియల్ ను, ఒక మీటరుకు ₹152.5 చొప్పున 1.40మీ. కొనుగోలు చేసింది. ధార్మిక చెల్లించాల్సిన మొత్తాన్ని కనుగొనండి.

8. అమృత ఒక ఆల్బమ్ తయారు చేయడానికి 16 ఛార్టులను కొనుగోలు చేయాలని అనుకుంటుంది. ఒక పిక్చర్ ఛార్టు ధర ₹4.25 అయితే ఆమె ఎంత డబ్బు చెల్లించాల్సి ఉంటుంది?

2.3 దశాంశ సంఖ్యల భాగహారం:

సుజాత తన తరగతి గదిని 2.25 మీ. పొడవున్న రంగు కాగితపు పట్టిలతో అలంకరించాలని అనుకుంటోంది. 13.5 మీ. పొడవు గల రంగు కాగితాల స్ట్రిప్ రోల్ ను ఆమె కలిగి ఉన్నట్లయితే, స్ట్రిప్ రోల్ నుంచి ఆమె ఎన్ని ముక్కల రంగు కాగితపు పట్టిలను కావలిసిన కోలతలతో చేయగలదు? దీనిని సుజాత 13.5 ÷ 2.25 గా వ్యక్తం చేసింది.

ఈ విధంగా నిజ జీవితంలో మనం దశాంశ సంఖ్యలను భాగహారం చేయాల్సిన పరిస్థితులు చాలా వుంటాయి. కావున, ఇప్పుడు మనం దశాంశ సంఖ్యలను ఏవిధంగా భాగహారం చేయాలో తెలుసుకుందాం.

2.3.1 10, 100, 1000, ... మొదలైన వాటితో దశాంశ భిన్నాల భాగహారం.

కింది అమరికలను మనం పరిశీలిద్దాం.

1) $23.5 \div 10 = \frac{235}{10} \div \frac{10}{1} = \frac{235}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{235 \times 1}{10 \times 10} = \frac{235}{100} = 2.35$

2) $23.5 \div 100 = \frac{235}{10} \div \frac{100}{1} = \frac{235}{10} \times \frac{1}{100} = \frac{235 \times 1}{10 \times 100} = \frac{235}{1000} = 0.235$

3) $23.5 \div 1000 = \frac{235}{10} \div \frac{1000}{1} = \frac{235}{10} \times \frac{1}{1000} = \frac{235 \times 1}{10 \times 1000} = \frac{235}{10000} = 0.0235$

ఇదే విధంగానే మీరు క్రింది ఖాళీలను పూరించవచ్చును.

$169.28 \div 10 = 16.928$	$525.9 \div 10 =$ ______
$169.28 \div 100 = 1.6928$	$525.9 \div 100 =$ ______
$169.28 \div 1000 =$ ______	$525.9 \div 1000 =$ ______

ఒక దశాంశ సంఖ్యను 10 లేదా 100 లేదా 1000 లేదా ...... లతో భాగించినప్పుడు ఆ సంఖ్య యొక్క అంకెలు మరియు భాగఫలం యొక్క అంకెలు ఒకే విధంగా ఉంటాయి. కాని 1 తరువాత ఎన్ని సున్నాలు వున్నయో అన్ని స్థానాలు ఎడమ వైపుకు దశాంశ బిందువు జరుగుతుంది.

నీ ప్రగతిని తెలుసుకో

క్రింది వాటిని కనుగొనండి.

i) $81.5 \div 10$ ii) $4901.2 \div 100$ iii) $7301.3 \div 1000$ iv) $1.2 \div 100$

2.3.2 Division of Decimal numbers by whole numbers:

John dig a well of 4.8m in 3 hours. How much depth he digs in 1 hour on an average?

For this, we have to find 4.8 ÷ 3.

Let us find 4.8 ÷ 3 in 3 methods.

Method 1 : (Change decimal into fraction)

$$4.8 \div 3 = \frac{48}{10} \div \frac{3}{1}$$

$$= \frac{48}{10} \times \frac{1}{3} \quad \text{(why?)}$$

$$= \frac{16}{10} = 1.6$$

$\therefore 4.8 \div 3 = 1.6$

So, John digs in 1hour = 1.6m

Method 2 : (Divide and put decimal)

(1 decimal place) 4.8 ÷ 3

Step 1 : Divide whole number by ignoring decimals. 48 ÷ 3 = 16

Step 2 : Then mark the decimal point to the quotient from right most to left according to the number of decimal places in the given decimal.

$\therefore 4.8 \div 3 = 1.6$

Method 3 : (Pictorial representation)

4.8 ÷ 3

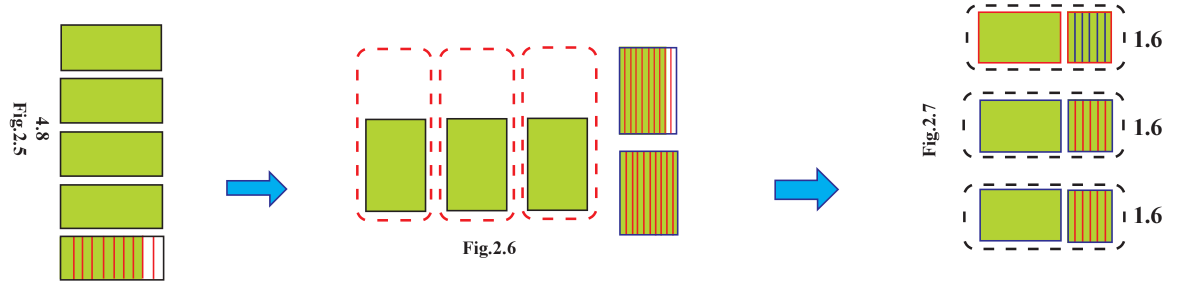


Fig.2.5 Fig.2.6 Fig.2.7

Take four shaded units and eight parts from ten equal parts of 5th unit which represents 4.8 in Fig.2.5. We have to divide these 4.8 into three equal groups. So, divide three units as one to each group (Fig.2.6). Remaining fourth unit can't be shared directly. Hence divide it into ten equal parts. Now a total of 18 tenth parts are available to share among three equal groups. Divide and share six tenth (0.6) parts to each group. Therefore 4.8 divides into 3 equal groups as each group has one unit and six tenth parts which totally represents 1.6.

Hence 4.8 ÷ 3 = 1.6

Check Your Progress

Find the following :

i) 69.4 ÷ 2 ii) 56.32 ÷ 8 iii) 6.5 ÷ 4 iv) 108.7 ÷ 5

2.3.3 Division of Decimal numbers by decimal numbers:

Srivalli is doing a part-time job at a milk dairy. One day she sold 32.5 litres of milk to the customers. If she received ₹1641.25 from them, find the cost of 1 litre milk?

To find this, we need to find ₹1641.25 ÷ 32.5

2.3.2 పూర్ణాంకాలతో దశాంశ భిన్నాల భాగాహారం :

జాన్ 3 గంటల్లో 4.8 మీటర్ల బావిని తవ్వాడు. సగటున 1 గంటలో అతడు ఎంత లోతు తవ్వగలడు? ఇందుకోసం 4.8 ÷ 3 ను కనుగొనాలి.

మనం 4.8 ÷ 3 ను 3 పద్ధతుల్లో కనుగొనవచ్చు.

పద్ధతి 1: (దశాంశాన్ని భిన్నంగా మార్చడం)

$$4.8 \div 3 = \frac{48}{10} \div \frac{3}{1}$$

$$= \frac{48}{10} \times \frac{1}{3} \quad \text{(ఎందుకు?)}$$

$$= \frac{16}{10} = 1.6$$

$$\therefore 4.8 \div 3 = 1.6$$

కావున, జాన్ 1గంటలో త్రవ్వినది = 1.6మీ.

పద్ధతి 2: (భాగించి, దశాంశ బిందువును పెట్టుట)

4.8 ÷ 3 (1 దశాంశ స్థానం)

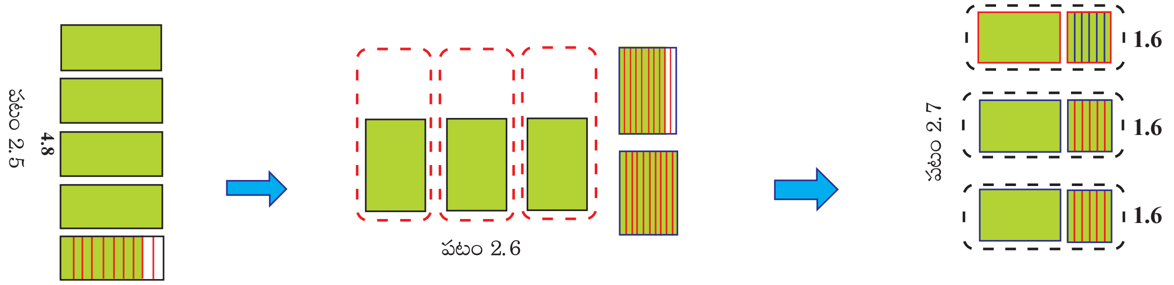
సోపానం 1: దశాంశ బిందువుతో సంబంధం లేకుండా పూర్ణసంఖ్యలను భాగించండి. 48 ÷ 3 = 16

సోపానం 2: ఇవ్వబడ్డ దశాంశంలో దశాంశ స్థానాల సంఖ్యకు అనుగుణంగా కుడివైపు నుంచి ఎడమవైపుకు దశాంశ బిందువును గుర్తించండి?

$\therefore$ 4.8 ÷ 3 = 1.6

పద్ధతి 3: (పటరూప పద్ధతి)

4.8 ÷ 3



పటం 2.5 పటం 2.6 పటం 2.7

పటం 2.5లో చూపినట్లు షేడ్ చేయబడి ఉన్న నాలుగు యూనిట్‌లను మరియు 5వ యూనిట్ లోని పది సమాన భాగాలలో ఎనిమిది భాగాలను తీసుకోండి. ఒక యూనిట్ 10 సమాన భాగాలకు ప్రాతినిధ్యం వహిస్తుంది. ఈ 4.8 ని మూడు సమాన భాగాలుగా విభజించాల్సి ఉంటుంది. అందువల్ల, ప్రతి గ్రూపుకు మూడు యూనిట్‌లను ఒకొక్కటి చొప్పున పంచండి (పటం 2.6). మిగిలిన ఒక యూనిట్‌ని మనం నేరుగా పంచలేము. అందువల్ల దానిని పది సమాన భాగాలుగా విభజించండి. ఇప్పుడు మొత్తం 18 భాగాలు మూడు గ్రూపులకు సమాన పంచుకోవడానికి అందుబాటులో ఉన్నాయి. ప్రతి గ్రూపుకు ఆరు పదవ వంతు భాగాల(0.6) చొప్పున పంచండి. అందువల్ల 4.8 ను 3 సమాన గ్రూపులుగా విభజన చేసినపుడు, ప్రతి గ్రూపుకు ఒక యూనిట్ మరియు ఆరు పదోవంతు భాగాలు వుండును.దీనిని 1.6 గా సూచించవచ్చును.

అందువల్ల 4.8÷ 3 = 1.6

నీ ప్రగతిని తెలుసుకో

క్రింది వాటిని కనుగొనండి.

i) 69.4 ÷ 2 ii) 56.32 ÷ 8 iii) 6.5 ÷ 4 iv) 108.7 ÷ 5

2.3.3 దశాంశ సంఖ్యను మరో దశాంశ సంఖ్యతో భాగహారం:

శ్రీవల్లి పాల డెయిరీలో పార్ట్ టైం ఉద్యోగం చేయుచున్నది. ఒకరోజు ఆమె 32.5 లీటర్ల పాలను వినియోగదారులకు అమ్మినది.

అమ్మిన పాలకు వారి నుంచి ₹1641.25 ను ఆమె తీసుకున్నట్లయితే, 1 లీటరు పాల ధరను కనుగొనండి?

1 లీటరు పాల ధర కనుగొనడం కొరకు, మనం ₹1641.25 ÷ 32.5 ను కనుగొనాల్సిన అవసరం వుంది.

This is division of decimal number by decimal number. First let us learn through simple example. 0.8÷ 0.2 We can do it in three methods:

Method - 1 : (Change decimal into fraction)

$0.8 \div 0.2$

$= \frac{8}{10} \div \frac{2}{10} = \frac{8}{10} \times \frac{10}{2}$

$= \frac{8}{2} = 4$

Method - 2 : (Divide and put decimals)

$0.8 \div 0.2$

Step1: Divisor (0.2) has one decimal point.so, multiply both with 10, then, the divisor becomes a whole number.

$= (0.8 \times 10) \div (0.2 \times 10)$

$= 8 \div 2$

Step 2 : Now we can divide by 2.

$8 \div 2 = 4$ $\quad \therefore 0.8 \div 0.2 = 4$

Method - 3 : (Pictorial representation)

$0.8 \div 0.2$

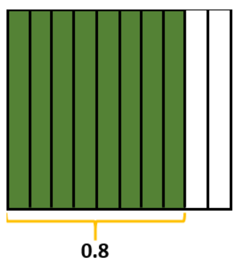


Fig. 2.8

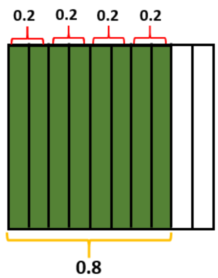


Fig. 2.9

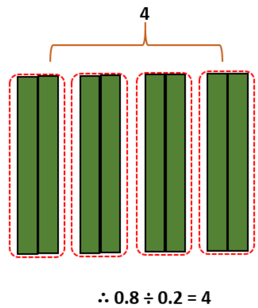


Fig. 2.10

Eight from ten equal parts of a unit represents 0.8 in Fig.2.8. We have to divide 0.8 into 0.2 to each group (Fig.2.9). How many such equal groups can formed? Yes, 4 groups (Fig.2.10). Therefore 0.8 divides in to 4 equal groups as each group having 0.2.

Hence $0.8 \div 0.2 = 4$.

Let us observe one more example 0.341 ÷ 1.1

Step1: Divisor 1.1 has one decimal point. So, multiply both with 10, so the divisor is a whole number.

$= (0.341 \times 10) \div (1.1 \times 10)$

$= 3.41 \div 11$ (2 decimal places to dividend)

Step 2 : We have to ignore the decimal places in the dividend so long as we remember to put it back later. So, do the calculation without decimal point.

$341 \div 11 = 31$

Step 3: Now, mark the decimal point in the quotient from right most to left, according to the total number of decimal places of the dividend.

$\therefore 0.341 \div 1.1 = 0.31$

Now we calculate ₹1641.25 ÷ 32.5 for 1 litre of milk.

Step 1: Divisor (32.5) has one decimal place. Multiply both numerator and denomirator by 10, so the divisor is a whole number.

$(1641.25 \times 10) \div (32.5 \times 10)$

$= 16412.5 \div 325$ (1 decimal place in the dividend)

Step 2 : $164125 \div 325 = 505$

Step 3 : ₹1641.25 ÷ 32.5 = ₹50.5

∴ Cost of 1litre milk = ₹50.50

అంటే దశాంశ సంఖ్యను మరో దశాంశ సంఖ్యతో భాగహారం చేయాలి. దీనిని మొదట సరళమైన ఉదాహరణ ద్వారా తెలుసుకుందాం. 0.8÷ 0.2 దీనిని మనం మూడు పద్ధతుల్లో చేయవచ్చు.

పద్ధతి 1 : (దశాంశాన్ని భిన్నంగా మార్చడం)

$0.8 \div 0.2$

$= \frac{8}{10} \div \frac{2}{10} = \frac{8}{10} \times \frac{10}{2}$

$= \frac{8}{2} = 4$

పద్ధతి 2 : (భాగించి, దశాంశ బిందువును పెట్టుట)

$0.8 \div 0.2$

సోపానం1: విభాజ్యం 0.2 ఒక దశాంశం కలిగి వుంది. కావున, రెండింటినీ 10తో గుణించవచ్చు, అప్పుడు విభాజ్యం, పూర్ణ సంఖ్య అవుతుంది.

$= (0.8 \times 10) \div (0.2 \times 10)$

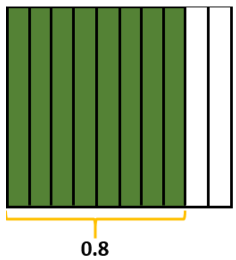
$= 8 \div 2$

సోపానం 2: ఇప్పుడు మనం 2 తో భాగించవచ్చును.

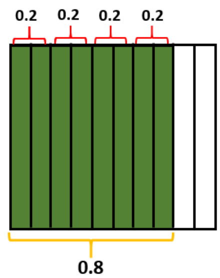
$8 \div 2 = 4$ $\quad \therefore 0.8 \div 0.2 = 4$

పద్ధతి 3 : (పటరూప పద్ధతి)

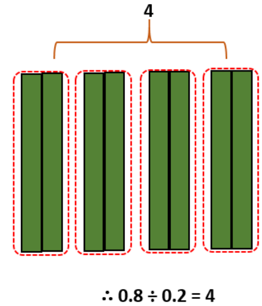
$0.8 \div 0.2$



పటం 2.8



పటం 2.9



పటం 2.10

పటం 2.8లో చూపిన విధంగా ఒక యూనిట్ యొక్క పది సమాన భాగాల నుంచి ఎనిమిది భాగాలు (ఆకుపచ్చ రంగు భాగాలు) 0.8కు ప్రాతినిధ్యం వహించును. మనం 0.8 ను ప్రతి సమూహమునకు 0.2 వచ్చేవిధంగా విభజించాల్సి ఉంటుంది (పటం 2.9). సమాన సమూహాలు అటువంటివి ఎన్ని ఏర్పడగలవు? 4 సమాన సమూహాలు (పటం 2.10) ఏర్పడును. అందువల్ల 0.8 ను, ప్రతి సమూహము లో 0.2 వుండే విధంగా 4 సమాన సమూహాలుగా విభజించవచ్చును.

$\therefore 0.8 \div 0.2 = 4$

మనం ఇంకొక ఉదాహరణ పరిశీలిద్దాం 341 ÷ 1.1

సోపానం 1: విభాజకం 1.1 ఒక దశాంశ బిందువును కలిగి ఉంది.

కావునా, రెండింటినీ 10తో గుణించితే, విభాజకం పూర్ణసంఖ్య గా మారును.

$= (0.341 \times 10) \div (1.1 \times 10)$

$= 3.41 \div 11$ (విభాజ్యంకు 2 దశాంశాలు వున్నాయి)

సోపానం 2: విభాజ్యంకు గల దశాంశ స్థానాలను మనం విస్మరించాలి. దశాంశ బిందువు లేకుండా భాగించండి.

$341 \div 11 = 31$

సోపానం 3: ఇప్పుడు, భాగఫలంకు కుడివైపు నుంచి ఎడమవైపుకు దశాంశ బిందువును గుర్తించండి. (విభాజ్యంకు గల దశాంశ స్థానాల సంఖ్య కు అనుగుణంగా)

$\therefore 0.341 \div 1.1 = 0.31$

ఇపుడు మనం 1లీ పాల ధర కనుగొనుటకు ₹ 1641.25 ÷ 32.5 ను గణిద్దాం.

సోపానం 1: విభాజకం (32.5) ఒక దశాంశ స్థానాన్ని కలిగి ఉంది. అందువల్ల, రెండింటిని 10తో గుణించండి.

$= (1641.25 \times 10) \div (32.5 \times 10)$

$= 16412.5 \div 325$ (విభాజ్యంలో 1 దశాంశ స్థానం)

సోపానం 2: $164125 \div 325 = 505$

సోపానం 3: ₹1641.25 ÷ 32.5 = ₹ 50.5 $\quad \therefore$ 1లీ పాల ధర = ₹ 50.50

Example 10: Madhuri is studying 7th class in Visakhapatnam. Her school teachers organised a tour to Araku valley by bus. Bus covered a distance of 98.5 km in 2.5 hours. If the bus is travelled at the same speed in the journey then find the distance travelled in 1hour.

Solution : Distance travelled by bus = 98.5 km

Time taken to travel this distance = 2.5 hours

$\therefore$ Bus travelled in 1 hour = 98.5 ÷ 2.5

$$= \frac{985}{25} = 39.4 \text{ km}$$

$\therefore$ Bus travelled in 1 hour = 39.4 km

Check Your Progress

Solve the following :

i) 0.45 ÷ 0.9 ii) 2.125 ÷ 0.05 iii) 94.3 ÷ 0.004 iv) 10.25 ÷ 0.2

Exercise - 2.3

1) **Fill in the blanks in the table.**

Division	Quotient
Example : 362.21 ÷ 10	36.221
5636.1 ÷ 100	_____
374.9 ÷ _____	0.3749
_____ ÷ 1000	2.0164
123.0 ÷ 100	_____
1300.7 ÷ _____	1.3007
_____ ÷ 10	59.001

2) **Solve the following.**

i) 5.51 ÷ 2 ii) 38.4 ÷ 3 iii) 57.39 ÷ 6 iv) 562.1 ÷ 11 v) 0.7005 ÷ 5

vi) 9.99 ÷ 3 vii) 13 ÷ 6.5 viii) 10.01 ÷ 11 ix) 8 ÷ 0.32 x) 320.1 ÷ 33

3) **Solve the following divisions.**

i) 78.24 ÷ 0.2 ii) 4.845 ÷ 1.5 iii) 0.246 ÷ 0.6 iv) 563.2 ÷ 2.2

v) 0.026 ÷0.13 vi) 4.347 ÷ 0.09 vii) 3.9 ÷ 0.13 viii) 20.32 ÷ 0.8

ix) 24.4÷ 6.1 x) 2.164 ÷ 0.008

4) **Solve the following.**

i) Divide 39.54 by 6 ii) Divide 7.2 by 10 iii) Divide 5.2 by 1.3

5) Sekhar travelled 154.5 km in 5 hours with uniform speed on his bike. How much distance does he travel in one hour?

6) If a mason worked 100 hours in 12.5 days to construct a wall, then how many hours he totally worked in a day?

7) If the cost of dozen eggs is ₹61.80, then find the cost of an egg.

ఉదాహరణ 10: మాధురి విశాఖపట్టణంలో 7వ తరగతి చదువుతోంది. ఆమె పాఠశాల ఉపాధ్యాయులు బస్సులో అరకులోయకు విహారయాత్రకు ఏర్పాట్లు చేశారు. బస్సు 2.5 గంటల్లో 98.5 కిలోమీటర్ల దూరాన్ని ప్రయాణించింది. బస్సు అదే వేగంతో ప్రయాణించినట్లయితే, 1గంటలో ప్రయాణించిన దూరాన్ని కనుగొనండి?

సాధన: బస్సు ప్రయాణించిన దూరం = 98.5 కి.మీ.

ఈ దూరం ప్రయాణించడానికి పట్టిన సమయం = 2.5 గంటలు

∴ 1 గంటలో బస్సు ప్రయాణించిన దూరం = 98.5 ÷ 2.5

$= \frac{985}{25} = 39.4$ కి.మీ.

∴ బస్సు 1 గంటలో ప్రయాణించిన దూరం = 39.4 కి.మీ.

నీ ప్రగతిని తెలుసుకో

క్రింది వాటిని సాధించండి:

i) 0.45 ÷ 0.9   ii) 2.125 ÷ 0.05   iii) 94.3 ÷ 0.004   iv) 10.25 ÷ 0.2

అభ్యాసం - 2.3

1) పట్టిక లోని ఖాళీలను నింపండి.

భాగహారం	భాగఫలం
ఉదాహరణ : 362.21 ÷ 10	36.221
5636.1 ÷ 100	______
374.9 ÷ ______	0.3749
______ ÷ 1000	2.0164
123.0 ÷ 100	______
1300.7 ÷ ______	1.3007
______ ÷ 10	59.001

2) క్రింది వాటిని సాధించండి.

i) 5.51 ÷ 2   ii) 38.4 ÷ 3   iii) 57.39 ÷ 6   iv) 562.1 ÷ 11   v) 0.7005 ÷ 5

vi) 9.99 ÷ 3   vii) 13 ÷ 6.5   viii) 10.01 ÷ 11   ix) 8 ÷ 0.32   x) 320.1 ÷ 33

3) క్రింది పేర్కొన్న భాగాహారాలను చేయండి.

i) 78.24 ÷ 0.2   ii) 4.845 ÷ 1.5   iii) 0.246 ÷ 0.6   iv) 563.2 ÷ 2.2

v) 0.026 ÷0.13   vi) 4.347 ÷ 0.09   vii) 3.9 ÷ 0.13   viii) 20.32 ÷ 0.8

ix) 24.4÷ 6.1   x) 2.164 ÷ 0.008

4) క్రింది వాటిని సాధించండి.

i) 39.54ను 6తో భాగించండి.   ii) 7.2ని 10తో భాగించండి.   iii) 5.2ని 1.3తో భాగించండి.

5) శేఖర్ తన బైక్‌పై సమవేగంతో 5 గంటల్లో 154.5 కిలోమీటర్లు ప్రయాణించాడు. ఒక గంటలో ఎంత దూరం ప్రయాణించగలడు?

6) ఒక తాపి మేస్త్రి గోడను నిర్మించడానికి 12.5 రోజుల్లో 100 గంటలు పనిచేస్తే, అతను రోజుకు ఎన్ని గంటలు పనిచేశాడు?

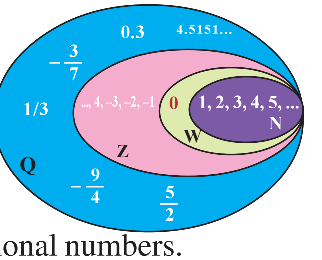
7) డజన్ గుడ్లు ఖరీదు ₹ 61.80 అయితే, ఒక గుడ్డు యొక్క ధర కనుగొనండి.

8) If the price of a tablet strip containing 10 tablets is ₹26.5, then find the price of each tablet.

2.4.Rational numbers:

Earlier, we have learnt that some situations like height and depth which are represented by positive and negative integers respctively. We can represent height of 750 m above sea level as $\frac{3}{4}$ km. and depth of 750m below sea level can be represented as $-\frac{3}{4}$ km. Which is neither an integer nor a fraction.There are many situations similar to the above situation neither integers nor fractions. So, we need to extend our number system to include such numbers.

A number which can be written in the form of $\frac{p}{q}$, where p and q are integers and $q \neq 0$ is a rational number. The set of rational numbers is denoted by 'Q'. A rational number may be positive, zero or negative.



Examples : $-\frac{1}{4}$, 1, –2, 100, $\frac{9}{2}$, $\frac{-5}{9}$, 0, $2\frac{1}{5}$, 0.35, –1.92 etc. are rational numbers.

$\frac{-1}{4}$, $\frac{-5}{9}$ are negative rational numbers and $\frac{9}{2}$, $2\frac{1}{5}$ are positve rational numbers.

Any number is in the form of $\frac{p}{q}$ where both p, q are integers and $q \neq 0$ is called a rational number.

We may write negative rational numbers $\frac{-3}{5}$ or $\frac{3}{-5}$ as $-\frac{3}{5}$

2.4.1 Standard form of rational number: A rational number $\frac{p}{q}$ is said to be in standard form, if *p, q* are integers having no common divisor (except 1) and $q \neq 0$.

Example : $\frac{1}{4}, \frac{-21}{8}, \frac{6}{13}$ etc.

If HCF of p and q is 1, then rational number $\frac{p}{q}$ is said to be in the standard form.

Example 11 : Find the standard form of rational number $\frac{-42}{18}$.

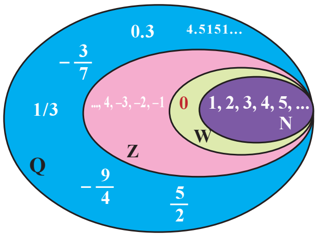
Solution : $-\frac{42}{18} = \frac{-42 \div 6}{18 \div 6} = -\frac{7}{3}$

Now 7 and 3 have no common divisors. So, $-\frac{7}{3}$ is standard form to $\frac{-42}{18}$.

8) 10 టాబ్లెట్(మాత్ర)లను కలిగి ఉన్న టాబ్లెట్ స్ట్రిప్ ధర ₹26.5 అయితే, ఒక టాబ్లెట్ ధరను కనుగొనండి.

2.4. అకరణీయ సంఖ్యలు :

ఎత్తు మరియు లోతు వంటివి వరుసగా ధన మరియు రుణ పూర్ణాంకాలచే సూచించబడతాయని ముందే తెలుసుకున్నాము. సముద్ర మట్టానికి పైన 750 మీ. ఎత్తును భిన్నాలలో $\frac{3}{4}$ కి.మీ.గాను,సముద్ర మట్టానికి దిగువన 750మీ. లోతును $-\frac{3}{4}$ కి.మీ.గా సూచించవచ్చు. ఇది పూర్ణాంకం కాదు మరియు భిన్నం కూడా కాదు. పూర్ణాంకాలు మరియు భిన్నాలను కలిగి ఉండని నిత్య జీవిత పరిస్థితులు అనేకం ఉన్నాయి. కాబట్టి, అటువంటి సంఖ్యలను చేర్చడానికి మన సంఖ్యా వ్యవస్థ యొక్క విస్తరణ అవసరం. p మరియు q లు పూర్ణసంఖ్యలు మరియు $q \neq 0$ లు అయితే $\frac{p}{q}$ రూపంలో రాయగల సంఖ్యలను అకరణీయ సంఖ్యలు అంటారు. అకరణీయ సంఖ్యల సమితిని 'Q' తో సూచిస్తాం. ఒక అకరణీయసంఖ్య ధనాత్మకం లేదా ఋణాత్మకం లేదా శూన్యం కావొచ్చును.



ఉదాహరణలు: $-\frac{1}{4}, 1, -2, 100, \frac{9}{2}, \frac{-5}{9}, 0, 2\frac{1}{5}, 0.35, -1.92$ మొదలైనవి అకరణీయ సంఖ్యలు.

$\frac{-1}{4}, \frac{-5}{9}$ లు ఋణ అకరణీయ సంఖ్యలు మరియు $\frac{9}{2}, 2\frac{1}{5}$ లు ధన అకరణీయ సంఖ్యలు.

ఏదైన సంఖ్య $\frac{p}{q}$ రూపంలో వుంటూ p మరియు q లు పూర్ణసంఖ్యలు అయి, $q \neq 0$ అయితే $\frac{p}{q}$ ను అకరణీయసంఖ్య అంటారు.

ఋణ అకరణీయసంఖ్య $\frac{-3}{5}$ లేదా $\frac{3}{-5}$ లను మనం $\frac{-3}{5}$ గా రాయవచ్చు.

2.4.1.అకరణీయ సంఖ్యల ప్రామాణిక రూపం:

p, q లు ఉమ్మడి కారణాంకం లేని (1మినహా) పూర్ణసంఖ్యలు అయితే అకరణీయసంఖ్య $\frac{p}{q}$ $(q \neq 0)$ ను ప్రామాణిక రూపంలో ఉందని చెప్పవచ్చును. ఉదాహరణ : $\frac{1}{4}, \frac{-21}{8}, \frac{6}{13}$ మొదలైనవి.

p మరియు q యొక్క గ.సా.భా. 1 అయితే అకరణీయసంఖ్య $\frac{p}{q}$ $(q \neq 0)$ను ప్రామాణిక రూపంలో ఉందని చెప్పవచ్చును.

ఉదాహరణ 11: అకరణీయసంఖ్య $\frac{-42}{18}$ కు ప్రామాణిక రూపాన్ని కనగొనండి.

సాధన : $-\frac{42}{18} = \frac{-42 \div 6}{18 \div 6} = -\frac{7}{3}$

ఇప్పుడు 7, 3లకు ఉమ్మడి కారణాంకాలు లేవు. అందువల్ల $-\frac{7}{3}$ అనేది $\frac{-42}{18}$ కు ప్రామాణిక రూపం.

2.4.2 Equivalent rational numbers: We get equivalent rational numbers if we multiply or divide both numerator and denominator with same number.

$$\frac{1}{2}=\frac{1\times 2}{2\times 2}=\frac{2}{4}, \qquad \frac{1}{2}=\frac{1\times 3}{2\times 3}=\frac{3}{6}, \qquad \frac{1}{2}=\frac{1\times 4}{2\times 4}=\frac{4}{8}$$

So, equivalent rational numbers of $\frac{1}{2}$ are $\frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \ldots\ldots$ etc.

$$\frac{-45}{18}=\frac{-45\div 3}{18\div 3}=\frac{-15}{6}, \qquad \frac{-45}{18}=\frac{-45\div 9}{18\div 9}=\frac{-5}{2}$$

So, equivalent rational numbers of $\frac{-45}{18}$ are $\frac{-15}{6}, \frac{-5}{2}, \ldots$ etc.

Example 12 : What are the equivalent rational numbers of $\frac{-5}{2}$ with

(i) numerator as –20 (ii) numerator as –35?

Solution : Rational number = $\frac{-5}{2}$

(i) To get numerator as –20, we have to multiply numerator and denominators with 4

$$\frac{-5}{2}=\frac{-5\times 4}{2\times 4}=\frac{-20}{8}$$

(ii) To get numerator as -35, we have to multiply numerator and denominators with 7

$$\frac{-5}{2}=\frac{-5\times 7}{2\times 7}=\frac{-35}{14}$$

Example 13: What are the equivalent rational numbers to $\frac{3}{8}$ with

(i) Denominator as 40 (ii) Denominator as 800?

Solution : Rational number = $\frac{3}{8}$

(i) To get denominator as 40, we have to multiply numerator and denominators with 5.

$$\frac{3}{8}=\frac{3\times 5}{8\times 5}=\frac{15}{40}$$

(ii) To get denominator as 800, we have to multiply numerator and denominators with 100.

$$\frac{3}{8}=\frac{3\times 100}{8\times 100}=\frac{300}{800}$$

2.4.2.సమాన అకరణీయ సంఖ్యలు : అకరణీయసంఖ్య యొక్క లవం మరియు హారం రెండింటినీ ఒకే సంఖ్యతో గుణించినా లేదా భాగించినా మనం సమాన అకరణీయసంఖ్యలను పొందుతాం.

$$\frac{1}{2}=\frac{1\times 2}{2\times 2}=\frac{2}{4},\qquad \frac{1}{2}=\frac{1\times 3}{2\times 3}=\frac{3}{6},\qquad \frac{1}{2}=\frac{1\times 4}{2\times 4}=\frac{4}{8}$$

కావున, $\frac{1}{2}$ కు సమానమైన అకరణీయసంఖ్యలు $\frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \ldots\ldots$ మొదలైనవి.

$$\frac{-45}{18}=\frac{-45\div 3}{18\div 3}=\frac{-15}{6},\qquad \frac{-45}{18}=\frac{-45\div 9}{18\div 9}=\frac{-5}{2}$$

కావున, $\frac{-45}{18}$ కు సమానమైన అకరణీయసంఖ్యలు $\frac{-15}{6}, \frac{-5}{2}, \ldots$ మొదలైనవి.

ఉదాహరణ 12: (i) లవం −20 (ii) లవం −35 గా ఉండునట్లు

$\frac{-5}{2}$ కు సమాన అకరణీయ సంఖ్యలు కనుగొనండి?

సాధన: అకరణీయ సంఖ్య = $\frac{-5}{2}$

(i) లవం −20గా పొందడం కొరకు, మనం లవం మరియు హారం రెండింటినీ 4తో గుణించాల్సి ఉంటుంది.

$$\frac{-5}{2}=\frac{-5\times 4}{2\times 4}=\frac{-20}{8}$$

(ii) లవం −35గా పొందడం కొరకు, మనం లవం మరియు హారం రెండింటినీ 7తో గుణించాల్సి ఉంటుంది. $\frac{-5}{2}=\frac{-5\times 7}{2\times 7}=\frac{-35}{14}$

ఉదాహరణ 13: (i) హారం 40 గా, (ii) హారం 800 గా ఉండునట్లు

$\frac{3}{8}$ కు సమానమైన అకరణీయ సంఖ్యలు కనుగొనండి?

సాధన: అకరణీయ సంఖ్య = $\frac{3}{8}$

(i) హారం 40గా పొందడం కొరకు, మనం 5తో లవం మరియు హారం రెండింటినీ గుణించాల్సి ఉంటుంది.

$$\frac{3}{8}=\frac{3\times 5}{8\times 5}=\frac{15}{40}$$

(ii) హారం 800గా పొందాలంటే, మనం 100తో లవం మరియు హారం రెండింటిని గుణించాల్సి ఉంటుంది.

$$\frac{3}{8}=\frac{3\times 100}{8\times 100}=\frac{300}{800}$$

Check Your Progress

1) Write equivalent rational numbers of

i) $\frac{2}{5}$ ii) $\frac{-5}{7}$ iii) $\frac{-11}{2}$ and iv) $\frac{20}{9}$

2) Find the stanard form of $\frac{40}{48}$.

Let's Explore

Here are equivalent rational numbers containing 1 to 9 digits only once.

One such example is : $\frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \frac{58}{174}$

another example : $\frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{79}{158}$ can you write some more?

2.4.3 Comparing rational numbers: We knew that to compare fractions, they should be like fractions. If they are unlike, convert them into like fractions by using their equivalent fractions. Like that we can compare rational numbers too.

For example to compare $\frac{-3}{4}$ and $\frac{-5}{7}$, we have to write equivalent rational numbers of both.

$$\frac{-3}{4} = \frac{-6}{8} = \frac{-9}{12} = \frac{-12}{16} = \frac{-15}{20} = \frac{-18}{24} = \frac{-21}{28} = \ldots$$

$$\frac{-5}{6} = \frac{-10}{14} = \frac{-15}{21} = \frac{-20}{28} = \ldots.$$

Now, we can compare $\frac{-21}{28}$ and $\frac{-20}{28}$ as they have same denominators.

$$\frac{-20}{28} > \frac{-21}{28}$$

$$\therefore \frac{-5}{7} > \frac{-3}{4}$$

Example14 : Which is smaller $\frac{-7}{3}$ or $\frac{-9}{2}$?

Solution : To find smaller number, we have to write equivalent rational numbers of both

$$\frac{-7}{3} = \frac{-14}{6}$$

$$\frac{-9}{2} = \frac{-18}{4} = \frac{-27}{6}$$

Now, we can say that $\frac{-27}{6} < \frac{-14}{6}$ ($\because$ –27 is smaller than –14) $\therefore \frac{-9}{2} < \frac{-7}{3}$

నీ ప్రగతిని తెలుసుకో

1) కింది వాటికి సమాన అకరణీయ సంఖ్యలను రాయండి.

i) $\frac{2}{5}$ ii) $\frac{-5}{7}$ iii) $\frac{-11}{2}$ మరియు iv) $\frac{20}{9}$

2) $\frac{40}{48}$ కు ప్రామాణిక అకరణీయ సంఖ్యను కనుగొనండి.

అన్వేషిద్దాం

1 నుండి 9 అంకెలు ఒకేసారి ఉపయోగించి సమాన అకరణీయ సంఖ్యలు కింద ఇవ్వబడ్డాయి.

అటువంటి ఒక ఉదాహరణ: $\frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \frac{58}{174}$

మరోక ఉదాహరణ $\frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{79}{158}$ మీరు మరికొన్ని రాయగలరా?

2.4.3 అకరణీయ సంఖ్యలను పోల్చడం : భిన్నాలను పోల్చడానికి అవి సజాతి భిన్నాలుగా ఉండాలని మనకు తెలుసు. ఒకవేళ అవి విజాతి భిన్నాలుగా ఉంటే వాటి సమాన భిన్నాలను గుర్తించి వాటి ద్వారా సజాతి భిన్నాలుగా మార్చుకుని, తరువాత పోల్చవలెనని కూడా మనకు తెలుసు. అకరణీయ సంఖ్యలను కూడా అదే విధంగా మనం పోల్చగలం.

ఉదాహరణకు $\frac{-3}{4}$ మరియు $\frac{-5}{7}$ లను పోల్చడానికి, మనం ఈ రెండింటికి సమాన అకరణీయ సంఖ్యలు వ్రాయాలి.

$$\frac{-3}{4} = \frac{-6}{8} = \frac{-9}{12} = \frac{-12}{16} = \frac{-15}{20} = \frac{-18}{24} = \frac{-21}{28} = \ldots$$

$$\frac{-5}{6} = \frac{-10}{14} = \frac{-15}{21} = \frac{-20}{28} = \ldots.$$

ఇప్పుడు మనం $\frac{-21}{28}$ మరియు $\frac{-20}{28}$ లకు ఒకే హారం ఉన్నందున పోల్చవచ్చు.

$$\frac{-20}{28} > \frac{-21}{28}$$

$$\therefore \frac{-5}{7} > \frac{-3}{4}$$

ఉదాహరణ 14: $\frac{-7}{3}, \frac{-9}{2}$ ల లో ఏది చిన్నది?

సాధన: చిన్న సంఖ్యను కనుగొనడం కొరకు, మనం రెండింటికీ సమాన అకరణీయ సంఖ్యలను వ్రాయాలి.

$$\frac{-7}{3} = \frac{-14}{6}$$

$$\frac{-9}{2} = \frac{-18}{4} = \frac{-27}{6}$$

ఇప్పుడు, మనం కింద విధంగా చెప్పవచ్చును. $\frac{-27}{6} < \frac{-14}{6}$ ($\because$ $-27, -14$ కంటే చిన్నది) $\therefore \frac{-9}{2} < \frac{-7}{3}$

Check Your Progress

1) Find which is bigger?

i) $\frac{2}{5}$ or 0 ii) $\frac{-2}{3}$ or $\frac{-1}{3}$ iii) $\frac{-5}{2}$ or $\frac{-7}{8}$

2) Find which rational number is smaller $\frac{-13}{4}$ or $\frac{-17}{6}$?

Any negative rational number is smaller than zero and all positive rational numbers

2.4.4 Rational numbers on number line :

Abhiram drew a number line and represented integers on it. His classmate Akhila said that the numbers which are on that number line are rational numbers too. Do you agree with her?

All integers are rational numbers but all rational numbers need not integers

Rational numbers can be represented on number line by just following simple steps:

- ➢ Before going to the number line don't forget to check the negative or positive sign of the rational number.
- ➢ Positive rational numbers are always represented on the right side of the zero on the number line.
- ➢ Negative rational numbers are always represented on the left side of the zero on the number line.
- ➢ Rational numbers which are proper fractions always lie in between 0 to –1 or 0 to 1.
- ➢ Rational numbers which are improper fractions always lie less than –1 (if they have negative sign) or lie greater than 1 (if they have positive sign).
- ➢ If the rational number which are improper fractions,we have to change them into mixed fractions, to find between which whole numbers, the rational number exists.

Example15 : Represent $\frac{3}{4}$ on number line

Solution :

Step 1: $\frac{3}{4}$ is a positive number so, it lies on the right side of the zero on number line.

Step 2: Since, $\frac{3}{4}$ is a proper fraction (numerator lesser than denominator), it lies in between 0 and 1.

నీ ప్రగతిని తెలుసుకో

1) ఏది పెద్దదో కనుగొనండి.

i) $\frac{2}{5}$ లేదా 0 ii) $\frac{-2}{3}$ లేదా $\frac{-1}{3}$ iii) $\frac{-5}{2}$ లేదా $\frac{-7}{8}$

2) $\frac{-13}{4}$ లేదా $\frac{-17}{6}$ లలో ఏ అకరణీయసంఖ్య చిన్నదో కనుగొనండి.

ఏదైనా ఋణ అకరణీయసంఖ్య, సున్నా కంటే మరియు అన్ని ధన అకరణీయసంఖ్యల కంటే చిన్నది.

2.4.4 సంఖ్యా రేఖపై అకరణీయ సంఖ్యలు :

అభిరామ్ సంఖ్యా రేఖ గీసి దానిపై పూర్ణ సంఖ్యలను గుర్తించాడు. ఆ సంఖ్యా రేఖపై ఉన్న సంఖ్యలు అకరణీయ సంఖ్యలు కూడ అవుతాయని అని తన క్లాస్‌మేట్ అఖిల చెప్పింది. మీరు ఆమెతో ఏకీభవిస్తారా?

అన్ని పూర్ణ సంఖ్యలు అకరణీయ సంఖ్యలు కానీ అన్ని అకరణీయ సంఖ్యలు పూర్ణ సంఖ్యలు కానవసరంలేదు.

కొన్ని సరళమైన సోపానాలను పాటించడం ద్వారా అకరణీయ సంఖ్యలను సంఖ్యా రేఖపై తేలికగా చూపించవచ్చు.

- సంఖ్యరేఖకు వెళ్లడానికి ముందు అకరణీయ సంఖ్య యొక్క ఋణ లేదా ధన గుర్తును గుర్తించడం మర్చిపోవద్దు.
- ధనాత్మక అకరణీయ సంఖ్యలు ఎల్లప్పుడూ సంఖ్యా రేఖపై సున్నాకు కుడివైపున వుంటాయి.
- ఋణ అకరణీయ సంఖ్యలు ఎల్లప్పుడూ సంఖ్యా రేఖపై సున్నా కు ఎడమవైపున వుంటాయి.
- క్రమ భిన్నాలుగా ఉండే అకరణీయ సంఖ్యలు ఎల్లప్పుడూ 0 నుండి -1 లేదా 0 నుండి 1 ల మధ్యలో ఉంటాయి.
- అపక్రమ భిన్నాలు గా అకరణీయ సంఖ్యలు ఋణ గుర్తు కలిగి ఉన్నట్లయితే -1 కంటే తక్కువగా ఉంటాయి లేదా ఒకవేళ అవి ధనాత్మక గుర్తు కలిగి ఉన్నట్లయితే 1 కంటే ఎక్కువగా ఉంటాయి.
- అపక్రమ భిన్నాలుగా వుండే అకరణీయ సంఖ్యలు ఉన్నట్లయితే, వాటిని మనం మిశ్రమ భిన్నాలుగా మార్చినచో, అవి ఏ పూర్ణ సంఖ్యల మధ్య ఉండునో సులభంగా కనుగొనవచ్చును.

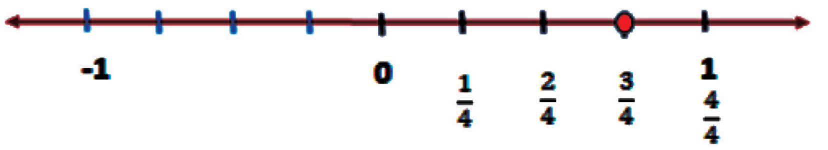
ఉదాహరణ 15 : $\frac{3}{4}$ ను సంఖ్యా రేఖపై గుర్తించండి.

సాధన :

సోపానం 1: $\frac{3}{4}$ అనేది ధన సంఖ్య, సంఖ్యా రేఖపై సున్నా కు కుడివైపున ఉంటుంది.

సోపానం 2: $\frac{3}{4}$ అనేది క్రమ భిన్నం కనుక (హారం కంటే లవం తక్కువ), ఇది 0 మరియు 1 ల మధ్య ఉంటుంది.

Step 3: we have to divide number line in to four equal parts in between 0 and 1 and third part of the four parts is represented as $\frac{3}{4}$.



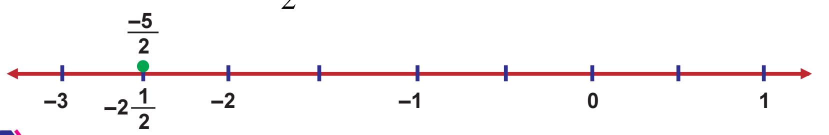
Example16: Represent $\frac{-5}{2}$ on number line

Solution :

Step 1: $\frac{-5}{2}$ is a negative number. So, it lies on the left side of the zero on number line.

Step 2: Since $\frac{-5}{2}$ is an improper fraction, it should be changed into mixed fraction $\frac{-5}{2} = -2\frac{1}{2}$ so, it lies between –2 and –3.

Step 3: We have to divide number line in between –2 to –3 into two equal parts and first part of the two parts is represented as $-2\frac{1}{2}$.



Check Your Progress

1) Represent these rational numbers on number line.

i) $\frac{5}{8}$ ii) $\frac{-9}{4}$ iii) $\frac{-11}{2}$ iv) $\frac{21}{8}$

Exercise - 2.4

1) Write the equivalent rational numbers of $-\frac{5}{3}$ with numerator as given below,

i) –15 ii) –20

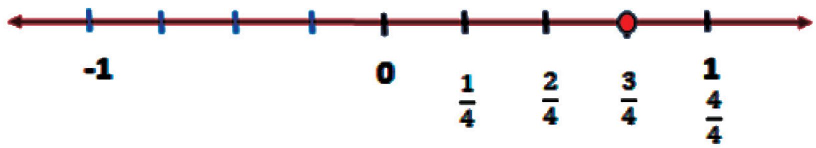
2) Write the equivalent rational numbers of $\frac{4}{9}$ with denominator as given below,

i) 36 ii) 90

3) Identify equivalent rational numbers in the following.

$\frac{2}{3}, \frac{5}{4}, \frac{0}{3}, \frac{-4}{6}, \frac{10}{8}, \frac{8}{12}, \frac{-2}{3}, \frac{6}{9}, \frac{15}{12}, \frac{0}{5}$

సోపానం 3: 0 మరియు 1 మధ్య సంఖ్యారేఖను నాలుగు సమాన భాగాలుగా చేసి, నాలుగు భాగాల యొక్క మూడో భాగంను $\frac{3}{4}$ గా గుర్తిస్తాము.



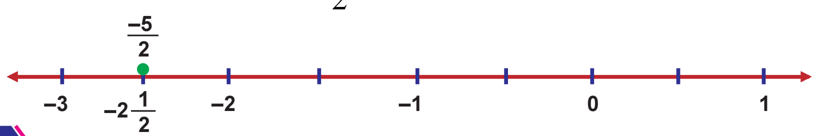
ఉదాహరణ 16: సంఖ్యారేఖపై $\frac{-5}{2}$ ను గుర్తించండి?

సాధన:

సోపానం 1: $\frac{-5}{2}$ అనేది ఋణ సంఖ్య. కావున, సంఖ్యారేఖపై సున్నా కు ఎడమవైపున ఉంటుంది.

సోపానం 2: $\frac{-5}{2}$ అనేది అపక్రమ భిన్నం కనుక, దీనిని మిశ్రమ భిన్నంగా మార్చాలి. $\frac{-5}{2} = -2\frac{1}{2}$ అందువల్ల, ఇది −2 మరియు −3 మధ్య ఉంటుంది.

సోపానం 3: మనం −2 నుంచి −3 మధ్య సంఖ్యారేఖను రెండు సమాన భాగాలుగా విభజిస్తాం మరియు రెండు భాగాల లో మొదటి భాగాన్ని $-2\frac{1}{2}$ గా గుర్తిస్తాం.



నీ ప్రగతిని తెలుసుకో

1) ఈ కింది అకరణీయ సంఖ్యలను సంఖ్యా రేఖపై గుర్తించండి?

i) $\frac{5}{8}$ ii) $\frac{-9}{4}$ iii) $\frac{-11}{2}$ iv) $\frac{21}{8}$

అభ్యాసం - 2.4

1) కింద ఇచ్చిన లవం వచ్చునట్లు $-\frac{5}{3}$ కు సమాన అకరణీయ సంఖ్యలను రాయండి.

i) −15 ii) −20

2) కింద ఇచ్చిన హారం వచ్చునట్లు $\frac{4}{9}$ కు సమాన అకరణీయ సంఖ్యలను రాయండి.

i) 36 ii) 90

3) క్రింది వాటిలో సమాన అకరణీయ సంఖ్యలను గుర్తించండి.

$\frac{2}{3}, \frac{5}{4}, \frac{0}{3}, \frac{-4}{6}, \frac{10}{8}, \frac{8}{12}, \frac{-2}{3}, \frac{6}{9}, \frac{15}{12}, \frac{0}{5}$

4) Write the following rational numbers in ascending order.

$$\frac{4}{9}, \frac{-2}{9}, \frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3}$$

5) Represent $\frac{-3}{5}, \frac{1}{5}, \frac{9}{5}, \frac{-11}{5}$ on the same number line.

6) Compare the following pair of rational numbers.

i) $-\frac{2}{7}, -\frac{3}{7}$ ii) $\frac{5}{9}, \frac{5}{8}$ iii) $-\frac{13}{12}, -\frac{7}{6}$

7) Which of the following is False?

1. Every natural number is a rational number but every rational number need not be a natural number.
2. Every rational number is an integer but every integer need not be a rational number.
3. Every integer is a rational number but every rational number need not be an integer.
4. Every fraction is a rational number but every rational number need not be a fraction.

8) Ramya said $-\frac{3}{2}$ is in between –1 and –2 on number line. Do you agree with Ramya? Why?

You know that different operations with the same pair of rational numbers usually give different answers. Observe the following calculations which are some interesting exceptions in rational numbers.

1) $\frac{11}{6} + \frac{11}{5} = \frac{11}{6} \times \frac{11}{5}$ 2) $\frac{169}{30} + \frac{13}{15} = \frac{169}{30} \times \frac{13}{15}$

Can you tell some more like these?

2.5 Word problems on rational numbers:

Pranavi's father brought a fruit box from market, which contains three types of fruits weighing $\frac{58}{3}$ kg in all. If $\frac{73}{9}$ kg of these are apples, $\frac{19}{6}$ kg are oranges and the rest are grapes. What is the weight of the grapes in the box?

Let us learn, how to find the weight of the grapes

Weight of a box = $\frac{58}{3}$ kg

Weight of apples = $\frac{73}{9}$ kg

4) క్రింది అకరణీయ సంఖ్యలను ఆరోహణ క్రమంలో రాయండి.

$$\frac{4}{9}, \frac{-2}{9}, \frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3}$$

5) ఒకే సంఖ్యా రేఖపై $\frac{-3}{5}, \frac{1}{5}, \frac{9}{5}, \frac{-11}{5}$ లను గుర్తించండి.

6) క్రింది అకరణీయ 'సంఖ్యల జత' లను పోల్చండి.

i) $-\frac{2}{7}, -\frac{3}{7}$ ii) $\frac{5}{9}, \frac{5}{8}$ iii) $-\frac{13}{12}, -\frac{7}{6}$

7) ఈ కిందివాటిలో ఏది అసత్యం?

1. ప్రతి సహజ సంఖ్య అకరణీయ సంఖ్య అవుతుంది, కాని ప్రతి అకరణీయ సంఖ్య సహజ సంఖ్య కానవసరం లేదు.
2. ప్రతి అకరణీయ సంఖ్య ఒక పూర్ణసంఖ్య అవుతుంది, కాని ప్రతి పూర్ణసంఖ్య అకరణీయ సంఖ్య కానవసరం లేదు.
3. ప్రతి పూర్ణసంఖ్య ఒక అకరణీయ సంఖ్య అవుతుంది, కాని ప్రతి అకరణీయ పూర్ణసంఖ్య కానవసరం లేదు.
4. ప్రతి భిన్నం ఒక అకరణీయ సంఖ్య అవుతుంది, కాని ప్రతి అకరణీయ సంఖ్య భిన్నం కానవసరం లేదు.

8) $-\frac{3}{2}$ సంఖ్యా రేఖపై -1 మరియు -2 ల మధ్య ఉంటుంది అని రమ్య అన్నది. రమ్యతో మీరు ఏకీభవిస్తున్నరా? ఎందుకు?

ఆలోచిద్దాం!

ఒకే జత అకరణీయ సంఖ్యలతో వేరు వేరు. ప్రక్రియలకు వేరు వేరు సమాధానాలు ఉంటాయని మీకు తెలుసు. కొన్ని అకరణీయ సంఖ్యల్లో ఆసక్తికరమైన మినహాయింపులు వుంటాయి. ఈ దిగువ ప్రక్రియలను గమనించండి.

1) $\frac{11}{6}+\frac{11}{5}=\frac{11}{6}\times\frac{11}{5}$ 2) $\frac{169}{30}+\frac{13}{15}=\frac{169}{30}\times\frac{13}{15}$

ఇటువంటివి మరికొన్ని మీరు చెప్పగలరా?

2.6 అకరణీయ సంఖ్యలపై పద సమస్యలు:

ప్రణవి తండ్రి $\frac{58}{3}$ కిలోగ్రాముల బరువున్న మూడు రకాల పండ్లను కలిగి ఉన్న పండ్ల పెట్టెను మార్కెట్ నుంచి తీసుకొచ్చారు. వీటిలో ($\frac{73}{9}$ కి.గ్రాలు ఆపిల్స్ అయితే, $\frac{19}{6}$ కి.గ్రాలు నారింజ, మిగిలినవి ద్రాక్షపండ్లు అయితే పెట్టెలో వున్న ద్రాక్షపండ్లు యొక్క బరువు ఎంత?

ద్రాక్ష పండ్ల బరువును ఎలా కనుగొనాలో తెలుసుకుందాం.

పెట్టె బరువు $=\frac{58}{3}$ కి.గ్రా.

ఆపిల్స్ బరువు $=\frac{73}{9}$ కి.గ్రా.

Weight of oranges = $\frac{19}{6}$ kg

Total weight of apples and oranges $= \frac{73}{9} + \frac{19}{6}$

$$= \frac{146}{18} + \frac{57}{18} = \frac{203}{18} \text{ kg}$$

$\therefore$ Weight of grapes = Weight of box – Weight of apples and oranges

$$= \frac{58}{3} - \frac{203}{18} = \frac{348}{18} - \frac{203}{18} = \frac{348-203}{18} = \frac{145}{18} \text{ kg.}$$

Example 17 : An examination has 10 questions. Each correct answer gets 1mark and for each wrong answer $\frac{1}{2}$ negative mark. If Kalisha done 5 questions right and 5 questions wrong, what would be her total marks?

Solution : For the 5 correct answers, she got marks $= 5 \times 1 = 5$

For remaining 5 wrong answers, she got marks $= 5 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{2}$

So, total marks Kalisha got $= 5 + \left(-\frac{5}{2}\right) = -\frac{10-5}{2} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$

Let's Explore

1. How much should be subtracted from $\frac{7}{2}$ to get $-\frac{5}{6}$?
2. Divide sum of $\frac{5}{2}$ and $\left(-\frac{3}{2}\right)$ by $\frac{9}{2}$.

Exercise - 2.5

1. The temperature is raised by $\frac{45}{14}$ ^{0}C from $\left(-\frac{4}{7}\right)$ ^{0}C. What would be the new temperature?
2. If the cost of $\frac{5}{2}$ metres of cloth is ₹235. What is the cost of 1 metre of cloth?

నారింజల బరువు $= \frac{19}{6}$ కి.గ్రా.

అపిల్స్ మరియు నారింజ పండ్ల యొక్క మొత్తం బరువు $= \frac{73}{9} + \frac{19}{6}$

$$= \frac{146}{18} + \frac{57}{18} = \frac{203}{18} \text{ కి.గ్రా.}$$

$\therefore$ ద్రాక్షపండ్ల బరువు = పెట్టె బరువు – అపిల్స్ మరియు నారింజ పండ్ల యొక్క మొత్తం బరువు

$$= \frac{58}{3} - \frac{203}{18} = \frac{348}{18} - \frac{203}{18} = \frac{348-203}{18} = \frac{145}{18} \text{ కి.గ్రా.}$$

ఉదాహరణ 17: ఒక పరీక్షలో 10 ప్రశ్నలు ఉన్నాయి. ప్రతి సరైన సమాధానానికి 1మార్కు మరియు ప్రతి తప్పు సమాధానానికి $\frac{1}{2}$ ఋణమార్కు ఉంటుంది. ఒకవేళ ఖలీషా 5 ప్రశ్నలకు సరైన సమాధానాలు మరియు 5 ప్రశ్నలకు తప్పుగా సమాధానాలు రాసి ఉన్నట్లయితే, ఆమె పొందిన మొత్తం మార్కులు ఎన్ని?

సాధన: 5 సరైన సమాధానాలకు ఆమె పొందిన మార్కులు $= 5 \times 1 = 5$

మిగిలిన 5 తప్పు సమాధానాలకు ఆమె పొందిన మార్కులు $= 5 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{2}$

$\therefore$ ఖలీషా పొందిన మొత్తం మార్కులు $= 5 + \left(-\frac{5}{2}\right) = \frac{10-5}{2} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$

అన్వేషిద్దాం

1. $\frac{7}{2}$ నుండి ఎంత తీసివేసిన $-\frac{5}{6}$ వస్తుంది?
2. $\frac{5}{2}$ మరియు $\left(-\frac{3}{2}\right)$ యొక్క మొత్తాన్ని $\frac{9}{2}$ తో భాగించండి.

అభ్యాసం - 2.5

1. ఉష్ణోగ్రత $\left(-\frac{4}{7}\right)^0C$ నుండి $\frac{45}{14}\ ^0C$ పెరిగింది. ప్రస్తుత ఉష్ణోగ్రత ఎంత?
2. $\frac{5}{2}$ మీటర్ల బట్ట ఖరీదు ₹235 అయిన ఒక మీటరు బట్ట ఖరీదు ఎంత?

3. One litre of diesel costs ₹$\frac{161}{2}$. What is the cost of $5\frac{1}{2}$ litres of diesel?

4. An examination has 20 questions. Each correct answer gets 1 mark and each wrong answer gets $\frac{1}{2}$ negative mark. If Kundan writes 13 right answers and 7 wrong answers, what would be his total marks?

5. One day in the winter season, the evening temperature in New Yark city was $\left(-\frac{3}{2}\right)$ ^{0}C. If the temperature further fell down 4 more degrees at mid-night. Then, find the temperature at mid-night.

6. Simplify the following using BODMAS rule : $\frac{4}{3}-\frac{2}{5}\times\frac{5}{3}+\frac{4}{9}\div\frac{4}{3}$.

7. Divide the sum of $\frac{-4}{5}$ and $\frac{2}{5}$ by the product of $\frac{3}{10}$ and $\frac{8}{5}$.

Project Work

Make two dice with cartboard or wood. Paste colour chart paper to the all faces to the each dice. Write any three positive and three negative rational numbers on faces of each dice. Now in group each time two students throw the dice who are sitting oppostie side to each other. Write the come up number on the dice in the table given and do the four fundamental operations with those two rational numbers. Submit the filled table to the teacher.

Rational number-1 (come up on the dice 1)	Rational number-2 (come up on the dice 2)	Addition	Subtraction	Multiplication	Division
Eg: 2/3	5/3	2/3 + 5/3 = 7/3	2/3–5/3 = –3/3 = –1	2/3 x 5/3 = 10/9 = 5/3	2/3 ÷ 5/3 = 2/5

• Historical Note •

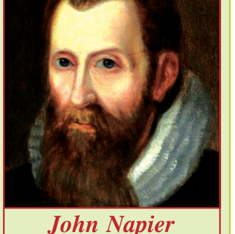
John Napier of Merchiston (UK) was born in the year 1550. He started his formal education at the age of 13 as was the common tradition of that time. However he soon dropped out of school and travelled to Europe. He returned to Scotland at the age of 21.

John Napier is founder of logarithms and he became so after spending long hours, doing lengthy calculations of astronomy.

He also invented the so-called 'Napier's strips' which were devices that could be used as calculators.

Napier also made improvements to the idea of the decimal fraction by starting the use of decimal point, a practice that very soon became common throughout Britain.

Napier was widely recognised for his work in mathematics and astronomy. He died in the year 1617.



John Napier
1550 - 1617

3. ఒక లీటరు డీజిల్ ధర ₹$\frac{161}{2}$ అయితే $5\frac{1}{2}$ లీటర్ల డీజిల్ ధర ఎంత?

4. ఒక పరీక్షలో 20 ప్రశ్నలు ఉన్నాయి. ప్రతి సరైన సమాధానానికి 1మార్కు మరియు ప్రతి తప్పు సమాధానానికి $\frac{1}{2}$ ఋణమార్కు ఉంటుంది. కుందన్ 13 సరైన సమాధానాలు మరియు 7 తప్పు సమాధానాలు రాసినట్లయితే, అతడు పొందిన మొత్తం మార్కులు ఎంత?

5. శీతాకాలంలో ఒక రోజు, న్యూయార్క్ నగరంలో సాయంత్రం ఉష్ణోగ్రత $\left(-\frac{3}{2}\right)$ ^{0}C. అర్ధరాత్రి అయ్యేసరికి ఉష్ణోగ్రత 4^{0}C తగ్గింది. అర్ధరాత్రి సమయంలో ఉష్ణోగ్రత ను కనుగొనండి.

6. BODMAS నియమం ఉపయోగించి దిగువ వాటిని సూక్ష్మీకరించండి: $\frac{4}{3}-\frac{2}{5}\times\frac{5}{3}+\frac{4}{9}\div\frac{4}{3}$.

7. $\frac{-4}{5}$ మరియు $\frac{2}{5}$ ల మొత్తం ను, $\frac{3}{10}$ మరియు $\frac{8}{5}$ ల లబ్ధంతో భాగించండి.

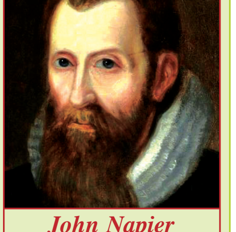
ప్రాజెక్టు పని

కార్డ్ బోర్డ్ లేదా కలపతో రెండు పాచికలు తయారు చేయండి. ప్రతి పాచికకు అన్ని ముఖాలకు రంగు చార్ట్ కాగితాన్ని అతికించండి. ప్రతి పాచిక ముఖాలపై ఏవైనా మూడు ధన మరియు మూడు రుణ అకరణీయ సంఖ్యలను వ్రాయండి. ఇప్పుడు గ్రూప్‌లో ప్రతిసారీ ఇద్దరు విద్యార్థులు ఒకరికిఒకరు ఎదురుగా కూర్చుని పాచికలను వేస్తారు. ఇచ్చిన పట్టికలోని పాచికల పైభాగం ఉన్న సంఖ్యలను వ్రాసి, ఆ రెండు అకరణీయ సంఖ్యలతో చతుర్విధ పరిక్రియలను చేయండి. జవాబులను పట్టికలో నింపండి. నింపిన పట్టికను మీ టీచర్‌కు సమర్పించండి.

అకరణీయ సంఖ్య -1 (పాచిక -1 పై వున్న సంఖ్య)	అకరణీయ సంఖ్య - 2 (పాచిక -2 పై వున్న సంఖ్య)	సంకలనం	వ్యవకలనం	గుణకారం	భాగహారం
Eg: 2/3	5/3	2/3 + 5/3 = 7/3	2/3–5/3 = –3/3 = –1	2/3 x 5/3 = 10/9 = 5/3	2/3 ÷ 5/3 = 2/5

• చారిత్రక అంశము •

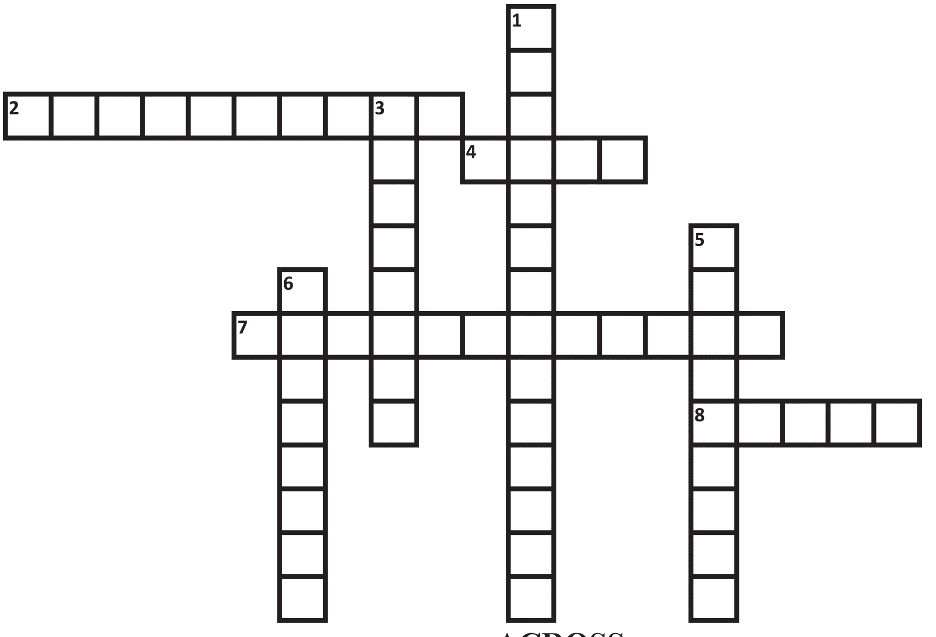
మెర్కిస్టన్‌కు చెందిన జాన్ నేపియర్ 1550వ సంవత్సరంలో జన్మించాడు. ఆనాటి సంప్రదాయం ప్రకారం అతను 13 సంవత్సరాల వయస్సులో తన సాధారణ విద్యను అభ్యసించాడు. అయినప్పటికీ అతను కొద్ది కాలంలోనే పాఠశాలకు వెళ్లడం మానివేసి యూరప్ వెళ్ళాడు. అతను 21 సంవత్సరాల వయస్సులో స్కాట్లాండుకు తిరిగి వచ్చాడు. "జాన్ నేపియర్" ఖగోళశాస్త్రం యొక్క సుదీర్ఘ గణనలు చేయుటలో ఎక్కువ గంటలు గడుపుత వున్న సమస్యలను అధిగమించే క్రమంలో "లాగరిథం"లను కనుగొన్నాడు. అతను "నేపియర్ పట్టీలు" అని పిలవబడే వాటిని కనుగొన్నాడు, అవి కాలిక్యులేటర్లుగా ఉపయోగించబడే పరికరాలు. "నేపియర్" దశాంశ బిందువు వాడకాన్ని ప్రారంభించడం ద్వారా దశాంశ భిన్నం యొక్క ఆలోచనలను విస్తృతం చేశాడు. ఈ పద్ధతి బ్రిటన్ అంతటా చాలా సాధారణమైంది. "నేపియర్" గణితం మరియు ఖగోళ శాస్త్రంలో చేసిన కృషికి ప్రత్యేకంగా గుర్తింపు పొందాడు. అతను 1617 సంవత్సరంలో మరణించాడు.


John Napier
1550 - 1617

Puzzle time

Fill the boxes with suitable words. Clues are given in the below :

CROSS WORD PUZZLE



DOWN:

1. a number in $\frac{p}{q}$ form where p, q are integers and $q \neq 0$.
3. type of rational numbers which are left side of zero on the number line.
5. place of 4 in 39.146
6. another form of fractions with denominators 10, 100, 1000, ….

ACROSS :

2. type of rational numbers $\frac{-1}{3}, \frac{-2}{6}, \frac{-3}{12}$.
4. type of fractions which are same denominator.
7. the dot or point which separates whole number part and fractional part
8. moving side of a decimal point when a decimal multiply with 10.

Unit Exercise

1. Choose the correct answer?

   i) The set of rational numbers are denoted by

   a) N b) W c) Z d) Q

   ii) Number of decimal places in the product of 48.23 x 0.2

   a) 2 b) 3 c) 1 d) 5

   iii) Number of decimal places to the quotient of 537.1 ÷10

   a) 1 b) 2 c) 4 d) 3

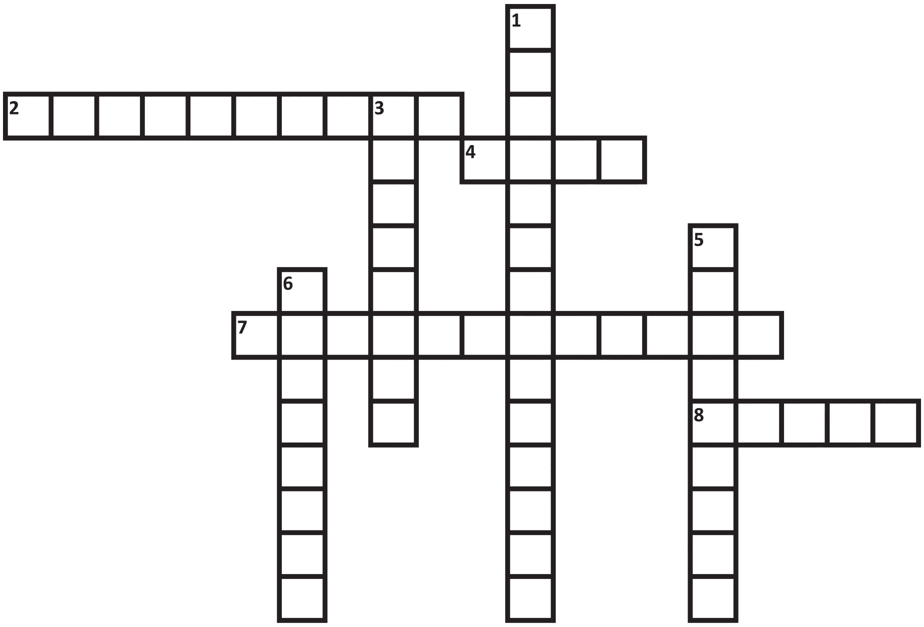
   iv) A rational number can be

   a) negative b) positive c) zero d) all the above

పజిల్ టైమ్

కింద ఇవ్వబడిన ఆధారాలతో గడులను సరియైన పదాలతో నింపండి.

గణిత పద కేళి



కింద ఇవ్వబడిన ఆధారాలతో గడులను సరియైన పదాలతో నింపండి.

అడ్డం :

1) ఒకే హారం కలిగి వున్న అకరణీయ సంఖ్యలు

2) 10, 100, 1000, ... వంటివి హారం గా గల భిన్నాలు

3) ఏదైనా దశాంశ సంఖ్య ను10 చే భాగించినపుడు దాని దశాంశ బిందువు ఎటు వైపు జరిగును?

4) సంఖ్యా రేఖ పై “0” కు ఎడమ వైపున గలవి

నిలువు :

1) $\frac{-1}{3}, \frac{-2}{6}, \frac{-3}{12}$ వంటి భిన్నాలు

2) దశాంశ భిన్నంలో పూర్ణాంక భాగాన్ని, దశాంశ భాగాన్ని వేరు చేసే చుక్క

5) 39.149 అనే దశాంశ భిన్నం లో 4 వున్న స్థానం

6) p, q లు పూర్ణ సంఖ్యలు మరియు $q \neq 0$ అయితే, $\frac{p}{q}$ రూపం లో గల సంఖ్యలు.

యూనిట్ అభ్యాసం

1. సరైన సమాధానం ఎంచుకోండి?

   i) అకరణీయ సంఖ్యల సమితిని ఏ అక్షరంతో సూచిస్తారు?

   a) N b) W c) Z d) Q

   ii) 48.23 × 0.2 యొక్క లబ్ధం లో దశాంశ భాగం లోని అంకెల సంఖ్య

   a) 2 b) 3 c) 1 d) 5

   iii) 537.1 ÷ 10 యొక్క భాగఫలానికి దశాంశ భాగం లోని అంకెల సంఖ్య

   a) 1 b) 2 c) 4 d) 3

   iv) ఏదైనా ఒక అకరణీయ సంఖ్య............గా వుండవచ్చు.

   a) రుణాత్మకం b) ధనాత్మకం c) సున్న d) పై వన్నీ

2. Fill in the blanks:

i) The numbers written in the form of $\frac{p}{q}$, where p, q are integers and q $\neq$ 0 are ....numbers

ii) $0.11 \times 0.11 =$ .... iii) Standard form of $-\frac{15}{6} =$ ....

iv) Equivalent fraction to $-\frac{2}{3} =$ ....

3) Find the product:
i) 2.1×6.3 ii) 43.205×1.27 iii) 7.641×3.5 iv) 5.24×0.99

4) Solve the following:
i) $61.24 \div 0.4$ ii) $23.45 \div 1.5$ iii) $0.312 \div -0.6$ iv) $32.2 \div 2.2$

5) Mutiply 0.04 by $-\frac{1}{2}$.

6) Standard form of $-\frac{15}{35}$.

7) A Bus travelled 300 km in $7\frac{1}{2}$ hours with uniform speed. Find how many kilometres it travelled in 1 hour?

8) Suvarna had ₹300. She spent $\frac{1}{3}$ of her money on notebooks and $\frac{1}{4}$ of the remaining on stationery items. How much money is left with her?

9) One litre of diesel costs ₹84.65. What is the cost of 12.5 liters of diesel?

10) Write any five equivalent rational numbers of $\frac{-9}{5}$.

11) Represent $\frac{-2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{-1}{5}, \frac{3}{5}$ on same number line.

12) Find which rational number is smaller $-1\frac{1}{4}$ or $-\frac{13}{6}$.

P9I1Q4

Points to Remember

1. To add or subtract fractions they must have same denominator (like fractions).
2. For multiplication of fractions, we simply multiply numerators and multiply denominators.
3. To divide one fraction by another fraction, we have to multiply one fraction with the reciprocal of the another fraction.

2. ఖాళీలను నింపండి:

i) $\frac{p}{q}$, p,q లు పూర్ణసంఖ్యలు మరియు $q \neq 0$ రూపంలో రాయబడ్డ సంఖ్యలు..............సంఖ్యలు

ii) 0.11×0.11 iii) $-\frac{15}{6}$ కు ప్రామాణిక రూపం =

iv) $-\frac{2}{3}$ కు సమానమైన భిన్నం =

3) లబ్ధాన్ని కనుగొనండి:

i) 2.1×6.3 ii) 43.205×1.27 iii) 7.641×3.5 iv) 5.24×0.99

4) క్రింది వాటిని సాధించండి.

i) $61.24 \div 0.4$ ii) $23.45 \div 1.5$ iii) $0.312 \div -0.6$ iv) $32.2 \div 2.2$

5) 0.04ను $-\frac{1}{2}$ తో గుణించండి.

6) $-\frac{15}{35}$ యొక్క ప్రామాణిక రూపం.

7) ఒక బస్సు $7\frac{1}{2}$ గంటల్లో 300 కిలోమీటర్లు సమ వేగంతో ప్రయాణించింది. 1 గంటలో అది ఎన్ని కిలోమీటర్లు ప్రయాణించినదో కనుగొనండి.

8) సువర్ణ దగ్గర ₹300 వున్నాయి. ఆమె తన దగ్గర వున్న డబ్బులో $\frac{1}{3}$ వంతు ని నోట్ పుస్తకాల కొరకు మరియు మిగిలిన డబ్బులో $\frac{1}{4}$ వంతు స్టేషనరీ వస్తువుల కొరకు ఖర్చు పెట్టింది. ఆమె వద్ద ఎంత డబ్బు మిగిలి ఉంది?

9) ఒక లీటరు డీజిల్ ధర ₹84.65 అయిన 12.5 లీటర్ల డీజిల్ ఖరీదు ఎంత?

10) $\frac{-9}{5}$ కు ఏవైనా ఐదు సమాన అకరణీయ సంఖ్యలను వ్రాయండి.

11) ఒకే సంఖ్యా రేఖ మీద $\frac{-2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{-1}{5}, \frac{3}{5}$ లను గుర్తించండి.

12) $-1\frac{1}{4}$ లేదా $-\frac{13}{6}$ లలో ఏ అకరణీయ సంఖ్య చిన్నది.

G1Q6X6

గుర్తుంచుకోవాల్సిన అంశాలు

1. భిన్నాలను కలపడానికి లేదా తీసివేత చేయుటకు అవి ఒకే హారం కలిగి ఉండాలి. (సజాతి భిన్నాలు)
2. భిన్నాల గుణకారం చేయుటకొరకు, మనం వాటి లవాలను మరియు హారాలను గుణిస్తాం.
3. ఒక భిన్నాన్ని మరో భిన్నంతో భాగించాలంటే, ఒక భిన్నాన్ని మరో భిన్నం యొక్క గుణకార విలోమం తో గుణించాల్సి ఉంటుంది.

4. To multiply decimal numbers by 10, 100, 1000, shift the decimal point in the product as many places to the right as number of zeroes after 1.
5. The number of decimal digits in the product of any two decimal numbers is equal to the sum of decimal digits that are multiplied.
6. While dividing a decimal number by 10, 100 or 1000, the digits of the number and the quotient are same but the decimal point in the quotient shifts to the left by as many places as there are zeros 1 after.
7. A rational number $\frac{p}{q}$ is said to be standard form, if p, q are Integers having no common divisor and $q \neq 0$.
8. Before going to the number line don't forget to check the negative or positive sign of the rational number.
9. Rational numbers which are proper fractions are always lie in between 0 to 1 or 0 to –1.
10. Rational numbers which are improper fractions are always lie greater than 1(if they have positive sign) or lie less than –1 (if they have negative sign).
11. If the rational numbers which are improper fractions,we have to change them in to mixed fractions, to find between which whole numbers the rational number exists.

Number Series - 2

1. Adding or subtract of natural numbers:

   Eg: 6, 7, 9, 12, 16, 21, … *Explanation: (6+1), (7+2), (9+3), (12+4), (16+5)*

   a) 21 b) 25 c) 27 d) 28 *so, next number is (21 + 6) = 27*

2. Add the pattern:

   Eg: 10, 20, 40, 70, 110, … *Explanation: (10+10), (20+20), (40+30), (70+40)*

   a) 160 b) 180 c) 150 d) 210 *so, next number is (110 + 50) = 160*

3. Subtracting or adding odd numbers:

   Eg: 27, 26, 23, 18, 11, … *Explanation: (27 – 1), (26 – 3), (23 – 5), (18 – 7)*

   a) 4 b) 2 c) 9 d) 5 *so, next number is (11 – 9) = 2*

4. Multiply with a fixed number

   Eg: 5, 15, 45, 135, 405, *Explanation: (5×3), (15×3), (45×3), (135×3),*

   a) 1200 b) 1215 c) 850 d) 925 *so, next number is $(405 \times 3) = 1215$*

5. Multiply and add with same natural numbers:

   Eg: 5, 6, 14, 45 … (2016.NMMS) *Explanation: $(5 \times 1) + 1$, $(6 \times 2) + 2$, $(14 \times 3) + 3$,*

   a) 184 b) 180 c) 176 d) 225 *so, next number is $(45 \times 4) + 4 = 184$*

4. దశాంశ సంఖ్యలను 10, 100, 1000తో గుణించాలంటే, సంఖ్య మరియు భాగఫలం యొక్క అంకెలు ఒకేవిధంగా ఉంటాయి అయితే, 1 తరువాత సున్నాల సంఖ్యకు సమానంగా దశాంశ బిందువును కుడివైపుకు మార్చండి.
5. రెండు దశాంశ సంఖ్యలను గుణించినపుడు లబ్ధంలో దశాంశ స్థానాల సంఖ్య, గుణించబడిన సంఖ్యల దశాంశ స్థానాల సంఖ్యల మొత్తానికి సమానం.
6. ఒక దశాంశ సంఖ్యను 10, 100 లేదా 1000తో భాగించేటప్పుడు, సంఖ్య మరియు భాగఫలం యొక్క అంకెలు ఒకేవిధంగా ఉంటాయి అయితే, 1 తరువాత సున్నాల సంఖ్యకు సమానంగా దశాంశ బిందువును ఎడమ వైపుకు మార్చండి.
7. $\frac{p}{q}$ లు ఉమ్మడి కారణాంకం లేని పూర్ణాంకాలు మరియు $q \neq 0$. అయితే ఏదైనా అకరణీయ సంఖ్య p, q ను ప్రామాణిక రూపంలో వుంది అని అంటాం.
8. సంఖ్యరేఖకు వెళ్లడానికి ముందు అకరణీయ సంఖ్య యొక్క రుణ లేదా ధన గుర్తును తనిఖీ చేయడం మర్చిపోవద్దు.
9. క్రమ భిన్నాలు వంటి అకరణీయ సంఖ్యలు ఎల్లప్పుడూ 0 నుంచి 1 లేదా 0 నుంచి −1 మధ్య ఉంటాయి.
10. అపక్రమ భిన్నాలు వంటి అకరణీయ సంఖ్యలు (ఒకవేళ అవి ధనాత్మక గుర్తు కలిగి ఉన్నట్లయితే ఎల్లప్పుడూ 1 కంటే ఎక్కువగా ఉంటాయి లేదా ఒకవేళ అవి రుణాత్మక గుర్తు ఉన్నట్లయితే −1 కంటే తక్కువగా ఉంటాయి).
11. అకరణీయ సంఖ్యలు అపక్రమ భిన్నాలు వంటి వాటిని మనం మిశ్రమ భిన్నాలుగా మార్చి, ఏ పూర్ణ సంఖ్యల మధ్య అకరణీయ సంఖ్య ఉన్నదో కనుగొనాలి.

సంఖ్యా శ్రేణులు - 2

1. సహజ సంఖ్యలను కలపడం లేదా తీసివేయడం:
   ఉదా: 6, 7, 9, 12, 16, 21, … — వివరణ: (6+1), (7+2), (9+3), (12+4), (16+5)
   a) 21 b) 25 c) 27 d) 28 — కావున తరువాత వచ్చే సంఖ్య (21 + 6) = 27
2. ఒక క్రమంలో సంఖ్యలను కలపడం :
   ఉదా: 10, 20, 40, 70, 110, … — వివరణ: (10+10), (20+20), (40+30), (70+40)
   a) 160 b) 180 c) 150 d) 210 — కావున తరువాత వచ్చే సంఖ్య *(110 + 50) = 160*
3. బేసి సంఖ్యలను కలపడం లేదా తీసివేయడం
   ఉదా: 27, 26, 23, 18, 11, … — వివరణ: (27−1), (26−3), (23−5), (18−7)
   a) 4 b) 2 c) 9 d) 5 — తరువాత వచ్చే సంఖ్య (11−9) = 2
4. ఒక స్థిర సంఖ్య తో గుణించడం
   ఉదా: 5, 15, 45, 135, 405, — వివరణ: (5 × 3), (15 × 3), (45 × 3), (135 × 3),
   a) 1200 b) 1215 c) 850 d) 925 — కావున తరువాత వచ్చే సంఖ్య = 1215
5. ఒక సంఖ్యతో గుణించి అదే సంఖ్యను కలపడం
   ఉదా: 5, 6, 14, 45 … (2016.NMMS) — వివరణ: (5×1) + 1, (6×2) + 2, (14 × 3) +3,
   a) 184 b) 180 c) 176 d) 225 — కావున తరువాత వచ్చే సంఖ్య = 184

6. Multiply and add with a different fixed numbers

Eg: 3, 9, 21, 45, 93 …

a) 184 b) 187 c) 186 d) 189

Explanation: (3 × 2) +3, (9 × 2) +3, (21 × 2) + 3, (45 × 2) + 3, so, next number is (92 × 2) +3 = 187

7. Multiply with fixed number and add different numbers:

Eg: 12, 25, 52, 107…

a) 196 b) 207 c) 214 d) 218

Explanation: (12 × 2) +1, (25 × 2) +2, (52 × 2) +3, so, next number is (107 × 2) + 4 = 218

8. Multiply the sequence number (2016 NMMS) :

Eg: 7, 14, 42, 168, 840…

a) 1680 b) 5040 c) 760 d) 4200

Explanation: (7 × 2), (14 × 3), (42 × 4), (168 × 5) so, next number is (840 × 6) = 5040

9. Dividing with a fixed number

Eg: 256, 128, 64, 32, 16, ...

a) 8 b) 4 c) 16 d) 10

Explanation: (256/2), (128/2), (64/2),(32/2), … *so, next number is (16/2) = 8*

10. Multiply and divide with a different fixed numbers.

Eg: 12, 60, 30, 150, 75, …..

a) 325 b) 150 c) 375 d) 300

Explanation: (12 × 5), (60/2), (30 × 5),(150/2), … so, next number is (75 × 5) = 375

Practice problems:

1)	15, 27, 39, 51, 63, …	a) 85	b) 75	c) 65	d) 73
2)	2, 5, 10, 17, 26, 37, …	a) 48	b) 75	c) 50	d) 73
3)	1, 6, 16, 31, 51, 76, …	a) 95	b) 86	c) 91	d) 96
4)	13, 14, 16, 20, 28, 44, …	a) 76	b) 75	c) 87	d) 73
5)	28, 25, 30, 27, 32, 29, …	a) 26	b) 24	c) 34	d) 32
6)	3, –6, 12, -24, 48, -96, …	a) 192	b) –102	c) –192	d) 106
7)	1, 2, 6, 24, 120, 720, …	a) 920	b) 5040	c) 1040	d) 4320
8)	63, 64, 67, 72, 79, …	a) 88	b) 86	c) 87	d) 98
9)	9, 10, 22, 69, 280, …	a) 1205	b) 1425	c) 1400	d) 1405
10)	729, 243, 81, 27, …	a) 65	b) 18	c) 9	d) 73
11)	5, 15, 35, 75, 155, …	a) 215	b) 305	c) 315	d) 265
12)	240,240, 120, 40, …, 2	a) 10	b) 20	c) 18	d) 35
13)	20, 10, 10, 20, 80, …	a) 320	b) 640	c) 400	d) 80
14)	7, 10, 8, 11, 9, 12, …	a) 8	b) 14	c) 15	d) 10
15)	34, 30, 28, 24, 22, 18, …	a) 16	b) 14	c) 20	d) 15
16)	13, 26, 28, 56, …,116	a) 60	b) 112	c) 58	d) 15
17)	2020, 2021, 2023, 2026, 2030, …	a) 2040	b) 2035	c) 2034	d) 2032
18)	6, 12, 48, …, 2304	a) 288	b) 75	c) 50	d) 480
19)	2, 2, 6, 30, 210, …	a) 150	b) 96	c) 192	d) 1890
20)	9, 3, 18, 6, 36, …	a) 12	b) 24	c) 72	d) 1

6. వివిధ సంఖ్యలతో గుణించి మరియు స్థిర సంఖ్యను కలపడం.

ఉదా: 3, 9, 21, 45, 93 …

a) 184 b) 187 c) 186 d) 189

వివరణ: (3×2)+3, (9 × 2)+3, (21× 2)+3,(45×2)+3

కావున తరువాత వచ్చే సంఖ్య = 187

7. స్థిర సంఖ్యతో గుణించి, వరుస సంఖ్యలను కలపడం.

ఉదా: 12, 25, 52, 107…

a) 196 b) 207 c) 214 d) 218

వివరణ: (12 × 2) + 1, (25 × 2) + 2, (52 × 2) + 3,

కావున తరువాత వచ్చే సంఖ్య (107 × 2) + 4 = 218

8. వరుస సంఖ్యలతో గుణించడం (2016 NMMS) :

ఉదా: 7, 14, 42, 168, 840…

a) 1680 b) 5040 c) 760 d) 4200

వివరణ: (7×2), (14×3), (42×4), (168×5)

కావున తరువాత వచ్చే సంఖ్య (840×6) = 5040

9. స్థిర సంఖ్యతో భాగించడం.

ఉదా: 256, 128, 64, 32, 16, ...

a) 8 b) 4 c) 16 d) 10

వివరణ: (256/2), (128/2), (64/2),(32/2), ...

కావున తరువాత వచ్చే సంఖ్య (16/2) = 8

10. ఒక స్థిర సంఖ్యతో గుణించడం తరువాత మరొక స్థిర సంఖ్యతో భాగించడం.

ఉదా: 12, 60, 30, 150, 75, ...

a) 325 b) 150 c) 375 d) 300

వివరణ: (12 × 5), (60/2), (30×5), (150/2), ...

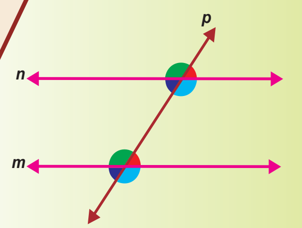
కావున తరువాత వచ్చే సంఖ్య (75 × 5) = 375

సాధనా సమస్యలు:

1) 15, 27, 39, 51, 63, …	a) 85	b) 75	c) 65	d) 73
2) 2, 5, 10, 17, 26, 37, …	a) 48	b) 75	c) 50	d) 73
3) 1, 6, 16, 31, 51, 76, …	a) 95	b) 86	c) 91	d) 96
4) 13, 14, 16, 20, 28, 44, …	a) 76	b) 75	c) 87	d) 73
5) 28, 25, 30, 27, 32, 29, …	a) 26	b) 24	c) 34	d) 32
6) 3, –6, 12, -24, 48, -96, …	a) 192	b) –102	c) –192	d) 106
7) 1, 2, 6, 24, 120, 720, …	a) 920	b) 5040	c) 1040	d) 4320
8) 63, 64, 67, 72, 79, …	a) 88	b) 86	c) 87	d) 98
9) 9, 10, 22, 69, 280, …	a) 1205	b) 1425	c) 1400	d) 1405
10) 729, 243, 81, 27, …	a) 65	b) 18	c) 9	d) 73
11) 5, 15, 35, 75, 155, …	a) 215	b) 305	c) 315	d) 265
12) 240,240, 120, 40, …, 2	a) 10	b) 20	c) 18	d) 35
13) 20, 10, 10, 20, 80, …	a) 320	b) 640	c) 400	d) 80
14) 7, 10, 8, 11, 9, 12, …	a) 8	b) 14	c) 15	d) 10
15) 34, 30, 28, 24, 22, 18, …	a) 16	b) 14	c) 20	d) 15
16) 13, 26, 28, 56, …,116	a) 60	b) 112	c) 58	d) 15
17) 2020, 2021, 2023, 2026, 2030, …	a) 2040	b) 2035	c) 2034	d) 2032
18) 6, 12, 48, …, 2304	a) 288	b) 75	c) 50	d) 480
19) 2, 2, 6, 30, 210, …	a) 150	b) 96	c) 192	d) 1890
20) 9, 3, 18, 6, 36, …	a) 12	b) 24	c) 72	d) 1

Chapter

4 LINES AND ANGLES



Learning Outcomes

The learner is able to
- understand the pair of angles based on their properties as complementary, supplementary, conjugate, adjacent, linear and vertically opposite angles.
- find the value of complementary, supplementary and conjugate angles of the given angle.
- give examples of various pairs of angles.
- explain the properties of various pairs of angles formed when a transversal cuts two lines.
- identify the pairs of angles and parallel lines in surroundings.
- solve the problems involving angles made by transversal on parallel lines.
- visualise and establish the relation between the pairs of angles formed by transversal with two parallel lines.

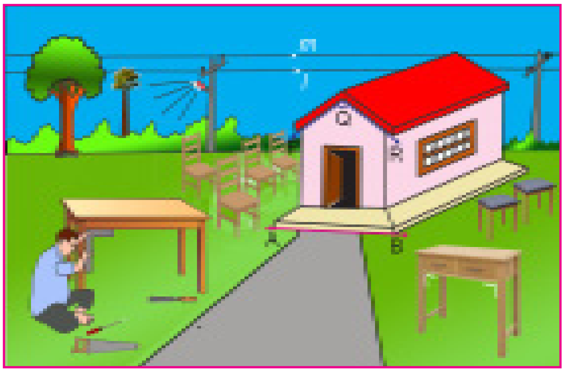
Content Items

4.0 Introduction
4.1 Pair of angles
4.2 Adjacent angles
4.3 Vertically opposite angles
4.4 Angles made by a transversal.

T3G2X3

4.0 Introduction :

Look at the following picture, what do you observe? You will observe the concepts like point, line segment, line, ray, angle, types of angles, parallel lines, perpendicular lines, intersecting lines that we have learnt in the previous classes. Can you name them? In the picture, A is a point, $\overline{AB}$ is a Line segment. If we extend the two end points of line segment in either direction endlessly, we will get a line $\overleftrightarrow{AB}$. Angles formed at corners ∠PQR is an angle. '*l*' and '*m*' are parallel lines.

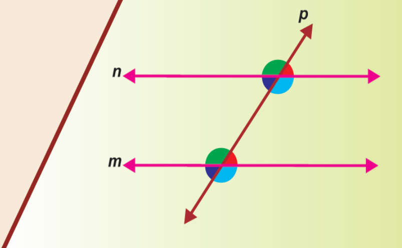


You also observe that a carpenter making chairs, tables, interiors etc. Do you know why they look so beautiful, perfect and strong? What happens if the marked angles are not equal? Do you observe where these lines and angles used in the picture?

Lines and angles are observed in all aspects of our life. Carpenters, Engineers, Architects etc., are using the concept of lines and angles in their works. Let us learn more about lines and angles in this chapter. Before going to discuss these concepts, let us recall the concepts which we have learnt in the previous class by the following exercise:

Chapter

4 రేఖలు మరియు కోణాలు



అభ్యసన ఫలితాలు

అభ్యాసకులు :

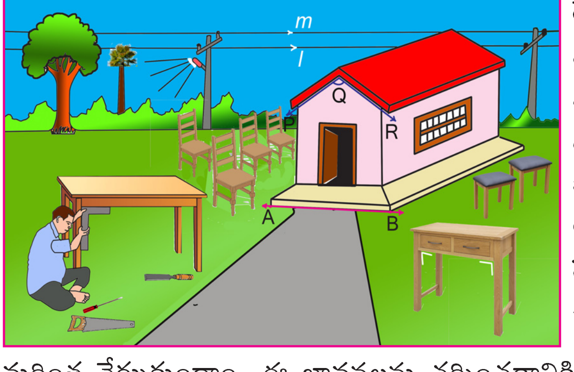
- పూరక, సంపూరక, సంయుగ్మ, ఆసన్న, రేఖీయ మరియు శీర్షాభిముఖ కోణాలు గురించి అవగాహన చేసుకొంటారు.
- ఇచ్చిన కోణానికి పూరక, సంపూరక, సంయుగ్మకోణాలను కనుగొంటారు.
- వివిధ కోణాల జతలకు ఉదాహరణలు ఇస్తారు.
- ఒక జత సరళరేఖలపై తిర్యగ్రేఖ చేయు కోణాలజతల లక్షణాలను వివరిస్తారు.
- తన పరిసరాల్లో గల కోణజతలను మరియు సమాంతర రేఖలను గుర్తిస్తారు.
- సమాంతర రేఖలపై తిర్యగ్రేఖ చేయు కోణాలకు సంబంధించిన సమస్యలను సాధిస్తారు.
- సమాంతర రేఖలపై తిర్యగరేఖ చేయు కోణాల జతలను ద్రుశ్యీకరించును మరియు ఆ కోణాల జతల మధ్య గల సంబంధాన్ని స్థాపిస్తారు.

విషయాంశాలు

4.0. పరిచయం
4.1 కోణాల జత
4.2. ఆసన్న కోణాలు
4.3. శీర్షాభిముఖ కోణాలు
4.4. తిర్యగ్రేఖచే ఏర్పడుకోణాలు

T4V4U8

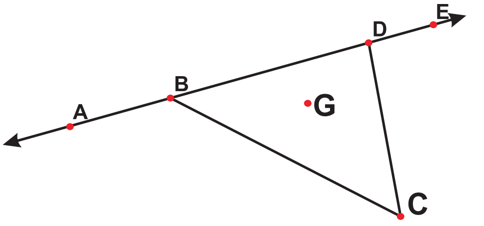
4.0 పరిచయం: క్రింద చిత్రాన్ని చూడండి, మీరు ఏమి గమనించారు? మీరు ఇంతకు ముందు తరగతులలో నేర్చుకున్న బిందువు, రేఖాఖండం, రేఖ, కిరణం, కోణం, కోణాల రకాలు, సమాంతర రేఖలు, లంబరేఖలు, ఖండన రేఖల వంటి భావనలను మీరు గమనించవచ్చు. మీరు వాటి పేర్లు చెప్పగలరా? పటంలో A అనేది బిందువు, AB ఒక రేఖాఖండం. రేఖాఖండం యొక్క రెండు అంత్యబిందువులను రెండు దిశలా అనంతంగా పొడిగించినట్లయితే, ఒక సరళరేఖ $\overleftrightarrow{AB}$ వచ్చును. మూలల యందు కోణాలు ఏర్పడినవి. ∠PQR ఒక కోణం. 'l' మరియు 'm' లు సమాంతర రేఖలు. ఒక వడ్రంగి కుర్చీలు, బెంచీలు, ఇంటిలోసామాన్లు మొదలైన వాటిని తయారు చేయడాన్ని కూడా మీరు గమనించి ఉంటారు.



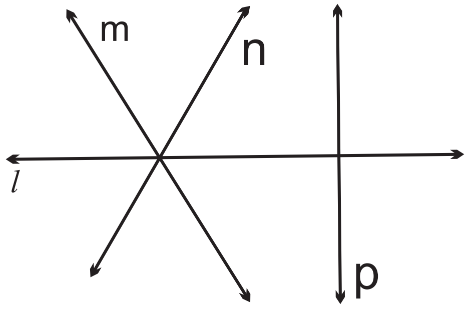
అవి అంత అందంగా, బలంగా ఎందుకు కనిపిస్తాయో మీకు తెలుసా? ఒకవేళ మార్క్ చేయబడ్డ కోణాలు సమానంగా లేనిచో ఏమి జరుగుతుంది? చిత్రంలో ఈ రేఖలు మరియు కోణాలు ఎక్కడ ఉపయోగించబడ్డాయో మీరు గమనించారా? మన నిత్యజీవితంలో అన్ని సందర్భాలలో సరళరేఖలు మరియు కోణాలును మనం గమనిస్తాము. వడ్రంగులు, ఇంజనీర్లు, ఆర్కిటెక్ట్‌లు మొదలైనవారు అందరూ వారి యొక్క పనుల యందు సరళరేఖలు మరియు కోణాల భావనను ఉపయోగిస్తూ ఉంటారు. ఈ అధ్యాయంలో సరళరేఖలు మరియు కోణాల గురించి మనం మరింత నేర్చుకుందాం. ఈ భావనలను చర్చించడానికి ముందు, దిగువ అభ్యాసం చేయడం ద్వారా గత తరగతిలో నేర్చుకున్న భావనలను మనం గుర్తు చేసుకుందాం.

Review Exercise

1. Observe the figure and name the points, line segments, rays and lines from the figure.

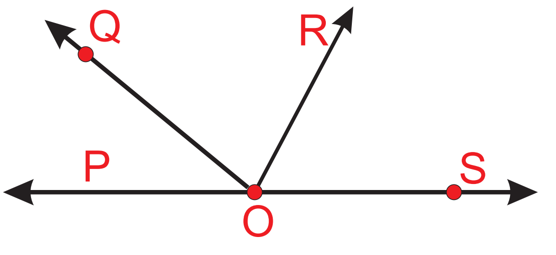


2. Observe the figure and write intersecting lines and concurrent lines.

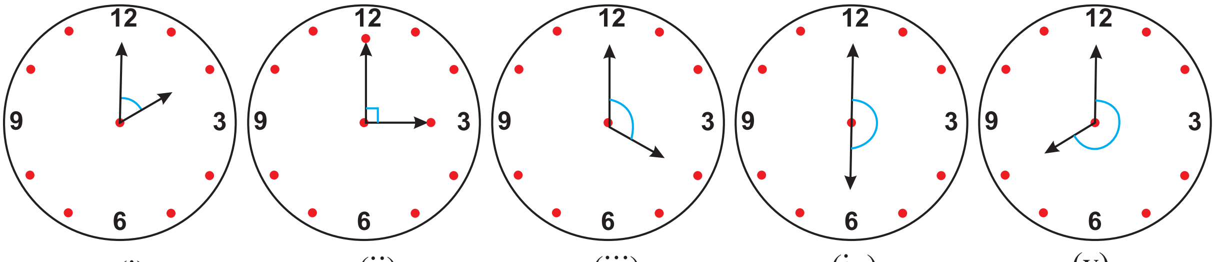


3. Draw a line segment PQ = 6.3 cm.

4. Name any three possible angles in the figure.



5. Write the type of angles you observed in the given clock.

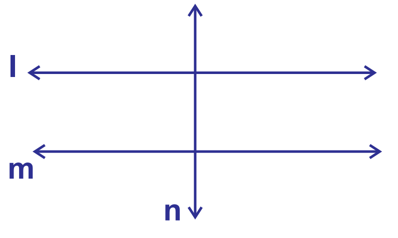


(i) (ii) (iii) (iv) (v)

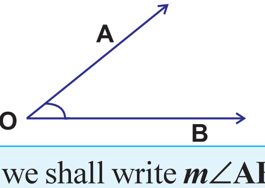
6. One right angle is equal to ________ degrees.

7. Write any 2 acute angles and any 2 obtuse angles.

8. Observe the parallel and perpendicular lines in the given figure. Write them using symbols ‖ , ⊥.



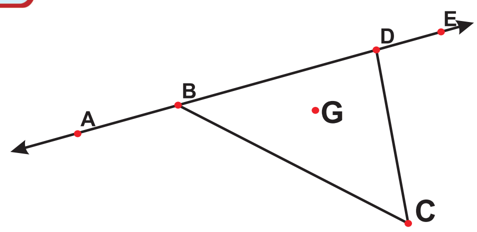
9. Measure angle ∠ AOB with protractor.

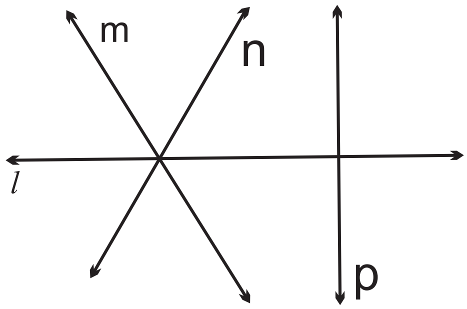


> ***Note :*** While referring to the measure of an angle ABC, we shall write ***m*∠ABC** as simply **∠ABC** .The context will make it clear, whether we are referring to the angle or its measure.

పునర్విమర్శ అభ్యాసం

1. పటాన్ని పరిశీలించండి. పటంలో గల బిందువులు, రేఖాఖండాలు, కిరణాలు మరియు సరళరేఖలను వ్రాయండి.

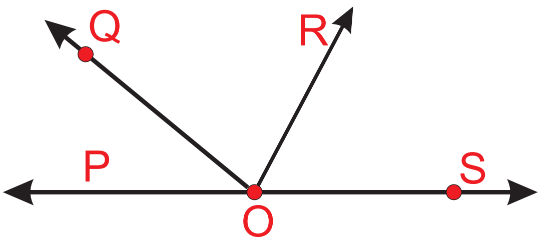




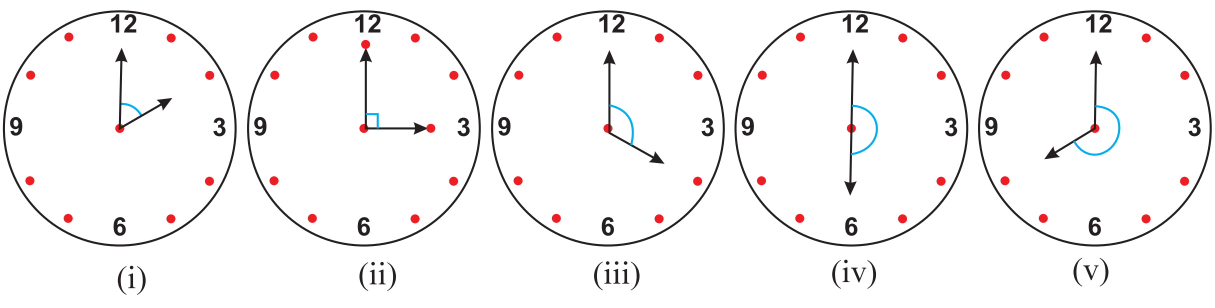
2. పటం పరిశీలించండి. పటంలో గల ఖండనరేఖలను మరియు మిళితరేఖలను వ్రాయండి.

3. PQ = 6.3 సెం.మీ. పొడవు గల రేఖాఖండాన్ని గీయండి.

4. ప్రక్కపటంలో గల ఏవైనా మూడు కోణాలను పేర్కొనండి.



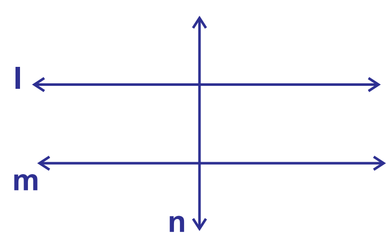
5. ఇచ్చిన గడియారంలో మీరు గుర్తించిన కోణం రకాన్ని వ్రాయండి.



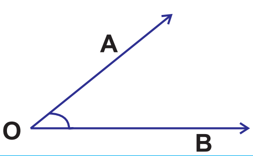
6. ఒక లంబకోణం ________ డిగ్రీలకు సమానం.

7. ఏవైనా రెండు అల్పకోణాలు మరియు రెండు అధికకోణాలును వ్రాయండి.

8. ఇవ్వబడ్డ పటంలో సమాంతరరేఖలను మరియు లంబరేఖలను గుర్తించండి. వాటిని గుర్తులు ‖ , ⊥ లను ఉపయోగించి వ్రాయండి.



9. కోణం ∠AOB ని కోణమానిని సహాయంతో కొలిచి వ్రాయండి.

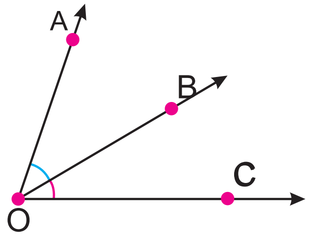


గమనిక : ఒక కోణం ABC యొక్క కొలతను సూచించడానికి, $m\angle ABC$ని క్లుప్తంగా $\angle ABC$ గా వ్రాస్తాము. అది కోణమా లేక దాని కొలతను ప్రస్తావిస్తున్నామా అనే విషయాన్ని ఆసందర్భం స్పష్టం చేస్తుంది.

4.1 Pair of angles :

A pair of angles means two angles. Let ∠ABC, ∠PQR is a pair of angles and $\angle ABC = 60^0$, $\angle PQR = 45^0$ .What is the sum of these two angles? The sum of these two angles is $60^0 + 45^0 = 105^0$. In this way we can add angles of same units.

Observe the given figure.



Measure the angles ∠AOB, ∠BOC and ∠AOC.

Here, ∠AOB = ____, ∠BOC=____, ∠AOC = ____

What do you observe?

The sum of pair of angles ∠AOB and ∠BOC is ∠AOC.

We write, ∠AOB + ∠BOC = ∠AOC

Take 15 pieces of a white paper. Write each pair of angles given below on each piece of paper. Fold each paper separately and put them in a box. Ask each student to come and take one folded piece of paper. Ask students to find the sum of angles written on them and write the sum on the paper.

i) $53^0, 27^0$	ii) $48^0, 132^0$	iii) $14^0, 76^0$	iv) $90^0, 270^0$	v) $200^0, 100^0$
vi) $26^0, 64^0$	vii) $63^0, 117^0$	viii) $111^0, 60^0$	ix) $144^0, 36^0$	x) $180^0, 180^0$
xi) $100^0, 260^0$	xii) $40^0, 35^0$	xiii) $45^0, 45^0$	xiv) $89^0, 271^0$	xv) $90^0, 90^0$.

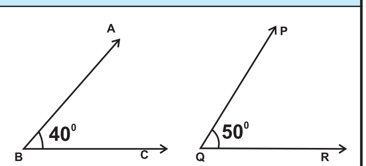
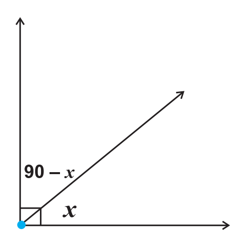
How many of you got a sum of 90^0? They are the pair of Complementary angles.

How many of you got a sum of 180^0? They are the pair of Supplementary angles.

How many of you got a sum of 360^0? They are the pair of Conjugate angles.

Remaining pair of angles are not complementary or supplementary or conjugate pair of angles.

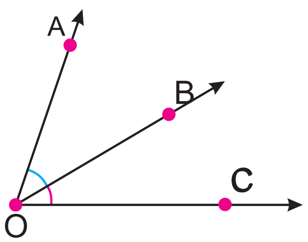
The types of pair of angles based on the sum of pair of angles:

Pair of angles	Examples	Examples in figures
Complementary angles: If the sum of two angles is 90^0, then the angles are called as complementary angles to each other. i.e., If $\angle A + \angle B = 90^0$, then ∠A is complementary angle to ∠B and ∠B is complementary angle to ∠A . Ex: $20^0 + 70^0 = 90^0$. So, 20^0 is the complementary angle of 70^0 and 70^0 is the complementary angle of 20^0.	i) $30^0, 60^0$ ii) $51^0, 39^0$ iii) ___,___ iv) ___,___ v) ___,___ Write 3 pairs on your own	i)  ii) 

4.1. కోణాల జత:

కోణాల జత అనగా రెండు కోణాలు అని అర్థం. ∠ABC, ∠PQR లు కోణాల జత. వాటి కొలతలు ∠ABC = 60^0, ∠ PQR= 45^0 అనుకొనిన ఈ రెండు కోణాల మొత్తం ఎంత? ఈ రెండు కోణాల మొత్తం $60^0 + 45^0 = 105^0$ అవుతుంది. ఈ విధంగా మనం ఒకే ప్రమాణం గల కోణాలను కలపవచ్చు.

ఇచ్చిన పటాన్ని గమనించండి.



కోణాలు ∠AOB, ∠BOC మరియు ∠AOC లను కొలవండి.

ఇక్కడ, ∠AOB = ____, ∠BOC=____, ∠AOC = ____

మీరు ఏమి గమనించారు?

∠AOB మరియు ∠BOC కోణాల జత మొత్తం ∠AOC కి సమానం.

దీనిని ∠AOB + ∠BOC = ∠AOC అని వ్రాస్తాం.

15 తెల్ల కాగితం ముక్కలు తీసుకోండి. ప్రతి కాగితం ముక్క పై దిగువ ఇవ్వబడ్డ ఒక్కొక్క కోణాల జతను వ్రాయండి. ప్రతి కాగితాన్ని విడిగా మడిచి, వాటిని ఒక బాక్సులో ఉంచండి. ప్రతి విద్యార్థి వచ్చి ఒక మడత కాగితం ముక్కను తీసుకోమని చెప్పండి. వాటిపై రాసిన కోణాల మొత్తాన్ని కనుగొనమని విద్యార్థులను అడగండి మరియు ఆ మొత్తాన్ని కాగితంపై రాయమని చెప్పండి.

i) $53^0, 27^0$	ii) $48^0, 132^0$	iii) $14^0, 76^0$	iv) $90^0, 270^0$	v) $200^0, 100^0$
vi) $26^0, 64^0$	vii) $63^0, 117^0$	viii) $111^0, 60^0$	ix) $144^0, 36^0$	x) $180^0, 180^0$
xi) $100^0, 260^0$	xii) $40^0, 35^0$	xiii) $45^0, 45^0$	xiv) $89^0, 271^0$	xv) $90^0, 90^0$.

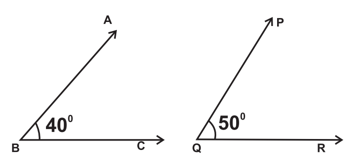
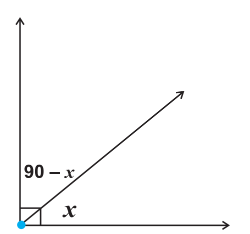
మీలో ఎంతమందికి కోణాల మొత్తం 90^0 వచ్చింది? అవి కొన్ని పూరక కోణాల జతలు.

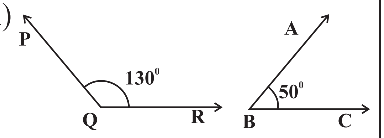
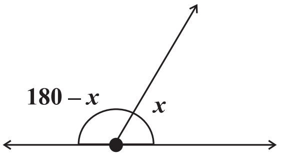
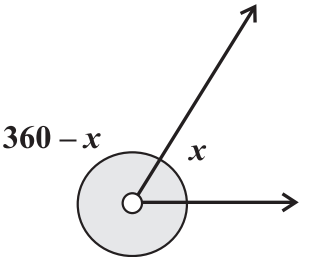
మీలో ఎంతమందికి కోణాల మొత్తం 180^0 వచ్చింది? అవి కొన్ని సంపూరక కోణాల జతలు.

మీలో ఎంతమందికి కోణాల మొత్తం 360^0 వచ్చింది? అవి కొన్ని సంయుగ్మ కోణాల జతలు.

మిగిలిన కోణాల జతలు పూరక కోణాలు లేదా, సంపూరకకోణాలు లేదా, సంయుగ్మ కోణాల జతలు కావు.

రెండుకోణాల మొత్తంను బట్టి కోణాల జతల రకాలు:

కోణాల జత	ఉదాహరణలు	పటములో ఉదాహరణలు
పూరక కోణాలు: రెండు కోణాలు మొత్తం 90^0 అయితే, ఆ రెండు కోణాలును ఒకదానికొకటి పూరక కోణాలు అంటారు. అనగా $\angle A + \angle B = 90^0$ అయినచో ∠A యొక్క పూరక కోణం ∠B అని మరియు ∠B యొక్క పూరక కోణం ∠A అని అంటారు. ఉదా : $20^0 + 70^0 = 90^0$, కనుక 20^0 యొక్క పూరక కోణం 70^0 మరియు 70^0 యొక్క పూరక కోణం 20^0 అవుతుంది.	i) $30^0, 60^0$ ii) $51^0, 39^0$ iii) ___,___ iv) ___,___ v) ___,___ మీరు స్వంతంగా 3 జతలు వ్రాయండి.	i)  ii) 

Pair of angles	Examples	Examples in figures
Supplementary angles: If the sum of two angles is 180^0, then the angles are called as supplementary angles to each other i.e., If $\angle A + \angle B = 180^0$, then $\angle A$ is supplementary angle to $\angle B$ and $\angle B$ is supplementary angle to $\angle A$. Eg: $100^0 + 80^0 = 180^0$. So, 100^0 is the supplementary angle of 80^0 and 80^0 is the supplementary angle of 100^0.	i) 120^0, 60^0 ii) 162^0, 18^0 iii) ___,___ iv) ___,___ v) ___,___	i)  ii) 
Conjugate angles: If the sum of two angles is 360^0, then the angles are called as conjugate angles to each other i.e., If $\angle A + \angle B = 360^0$, then $\angle A$ is conjugate angle to $\angle B$ and $\angle B$ is conjugate angle to $\angle A$. Eg: $200^0 + 160^0 = 360^0$. So, 200^0 is the conjugate angle of 160^0 and 160^0 is the conjugate angle of 200^0.	i) 330^0, 30^0 ii) 151^0, 209^0 iii) ___,___ iv) ___,___ v) ___,___	

Check Your Progress

1. Find the complementary angles of i) 27^0 ii) 43^0 iii) k^0 iv) 2^0
2. Find the supplementary angles of i) 13^0 ii) 97^0 iii) a^0 iv) 46^0
3. Find the conjugate angles of i) 74^0 ii) 180^0 iii) m^0 iv) 300^0

Let's Explore

(i) Umesh said, "Two acute angles cannot form a pair of supplementary angles." Do you agree? Give reason.

(ii) Lokesh said, "Each angle in any pair of complementary angles is always acute." Do you agree? Justify your answer.

Example 1 : In the given figure $\angle B$ and $\angle E$ are complementary angles. Find the value of x.

Solution : From the figure, $\angle B = x + 10^0$ and $\angle E = 35^0$

Since $\angle B$ and $\angle E$ are complementary angles,

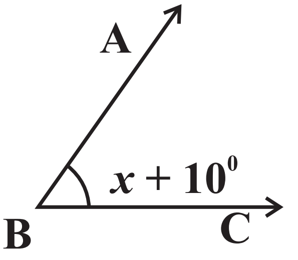
$\angle B + \angle E = 90°$

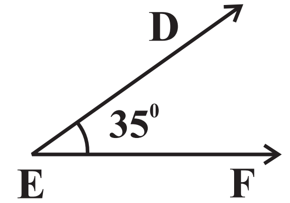
$x + 10^0 + 35^0 = 90^0$

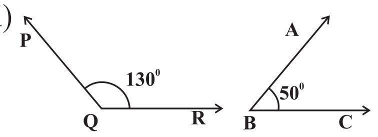
$x + 45^0 = 90^0$

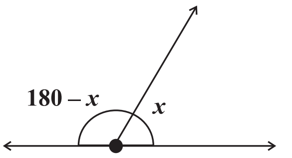
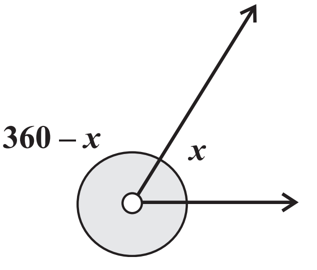
$x = 90^0 - 45^0$

$\therefore x = 45^0$





<table>
<tr><th>కోణాల జత</th><th>ఉదాహరణలు</th><th>పటములో ఉదాహరణలు</th></tr>
<tr><td>సంపూరక కోణాలు:
రెండు కోణాల మొత్తం 180^0 అయితే ఆ రెండు కోణాలును ఒకదానికొకటి సంపూరక కోణాలు అంటారు. అనగా $\angle A + \angle B = 180^0$ అయినచో $\angle A$ యొక్క సంపూరక కోణం $\angle B$ అని మరియు $\angle B$ యొక్క సంపూరక కోణం $\angle A$ అని అంటారు.
ఉదా: $100^0 + 80^0 = 180^0$, కనుక 100^0 యొక్క సంపూరక కోణం 80^0 మరియు 80^0 యొక్క సంపూరక కోణం 100^0 అవుతుంది.</td><td>i) $120^0, 60^0$
ii) $162^0, 18^0$
iii) ___,___
iv) ___,___
v) ___,___</td><td>i) 

ii) 
</td></tr>
<tr><td>సంయుగ్మ కోణాలు:
రెండు కోణాల మొత్తం 360^0 అయితే ఆ రెండు కోణాలు ను ఒకదానికొకటి సంయుగ్మ కోణాలు అంటారు. అనగా $\angle A + \angle B = 360^0$ అయినచో $\angle A$ యొక్క సంయుగ్మ కోణం $\angle B$ అని మరియు $\angle B$ యొక్క సంయుగ్మ కోణం $\angle A$ అని అంటారు.
ఉదా: $200^0 + 160^0 = 360^0$ కనుక 200^0 యొక్క సంయుగ్మ కోణం 160^0 మరియు 160^0 యొక్క సంయుగ్మ కోణం 200^0 అవుతుంది.</td><td>i) $330^0, 30^0$
ii) $151^0, 209^0$
iii) ___,___
iv) ___,___
v) ___,___</td><td>
</td></tr>
</table>

నీ ప్రగతిని తెలుసుకో

1. ఇచ్చిన కోణాలకు పూరక కోణాలను కనుగొనండి. i) 27^0 ii) 43^0 iii) k^0 iv) 2^0
2. ఇచ్చిన కోణాలకు సంపూరక కోణాలను కనుగొనండి. i) 13^0 ii) 97^0 iii) a^0 iv) 46^0
3. ఇచ్చిన కోణాలకు సంయుగ్మ కోణాలను కనుగొనండి. i) 74^0 ii) 180^0 iii) m^0 iv) 300^0

అన్వేషిద్దాం

i) "రెండు అల్పకోణాలు, సంపూరక కోణాల జతను ఏర్పరచలేవు" అని ఉమేష్ అన్నాడు. మీరు అంగీకరిస్తారా? కారణం తెల్పండి.

ii) "పూరకకోణాల జతలో ప్రతికోణం ఎల్లప్పుడూ అల్పకోణమే" అని లోకేష్ అన్నాడు. మీరు అంగీకరిస్తారా? మీ సమాధానాన్ని సమర్థించండి.

ఉదాహరణ 1: పటంలో $\angle B$ మరియు $\angle E$ లు పూరక కోణాలు అయిన x యొక్క విలువను కనుగొనండి.

సాధన: ఇచ్చిన పటం నుండి

$\angle B = x + 10^0$ మరియు $\angle E = 35^0$

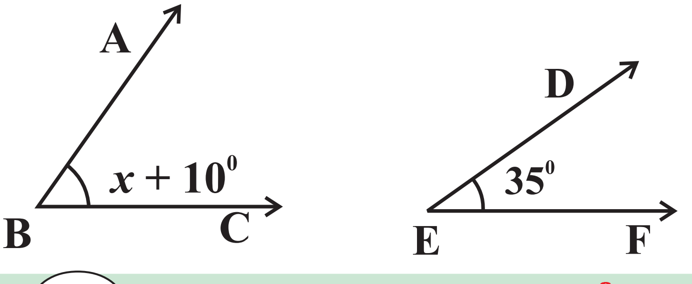
$\angle B$ మరియు $\angle E$ లు పూరక కోణాలు కనుక, $\angle B + \angle E = 90°$

$x + 10^0 + 35^0 = 90^0$

$x + 45^0 = 90^0$

$x = 90^0 - 45^0$

$\therefore x = 45^0$



Example 2: If the ratio of supplementary angles is 4:5, then find the two angles.

Solution: Given ratio of supplementary angles = 4 : 5

sum of the parts in the ratio = 4 + 5 = 9

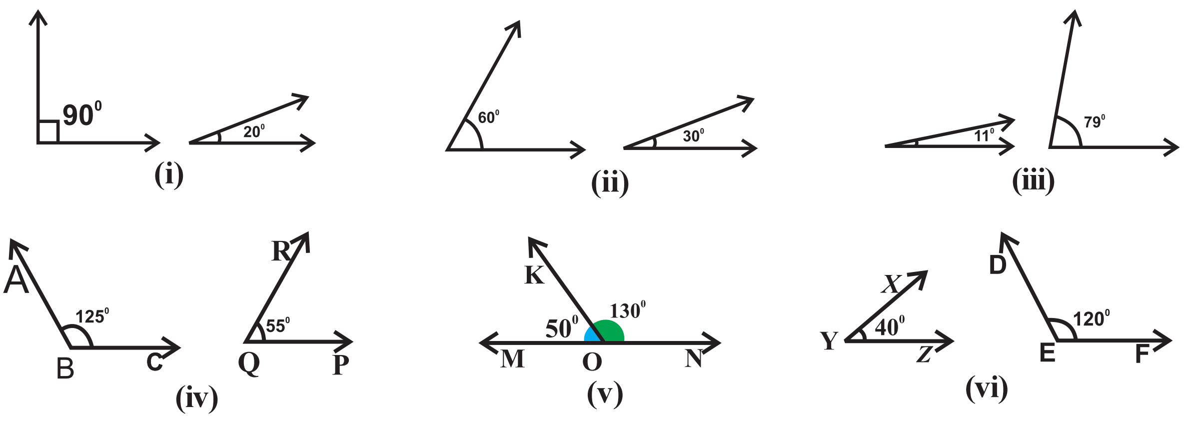
sum of the supplementary angles = 180^0

first angle = $\frac{4}{9} \times 180^0 = 80^0$

second angle = $\frac{5}{9} \times 180^0 = 100^0$

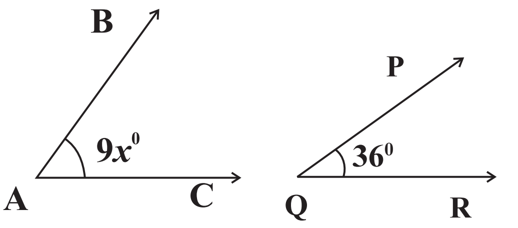
Exercise - 4.1

1. Find which of the following pair of angles are complementary and which are supplementary?



2. If the ratio of two complementary angles is 2 : 3, then find the two angles.

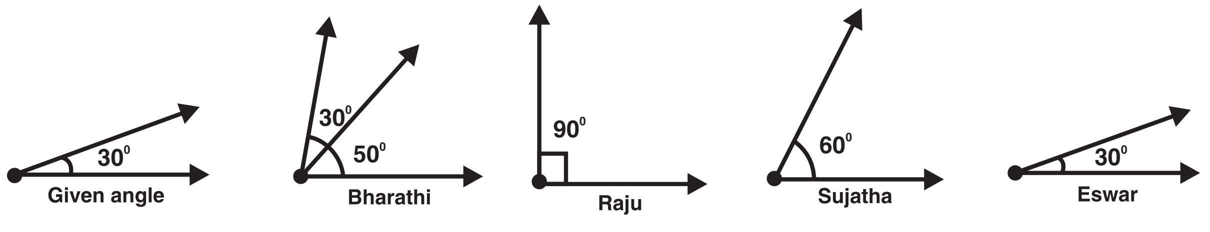
3. In the figure, $\angle A$ and $\angle Q$ are complementary angles. Find the value of x.



4. If $\angle A$ and $\angle B$ are conjugate angles and $\angle A = \angle B$. Find the two angles.

5. Draw a pair of complementary angles and a pair of supplementary angles.

6. Teacher asked students to draw the complementary angle to the given angle. The students have drawn as follows. Who is correct?



ఉదాహరణ 2 : సంపూరక కోణాల నిష్పత్తి 4 : 5 అయిన ఆ రెండు కోణాలను కనుగొనండి.

సాధన : ఇచ్చిన సంపూరక కోణాల నిష్పత్తి = 4 : 5

నిష్పత్తిలో భాగాల యొక్క మొత్తం = 4 + 5 = 9

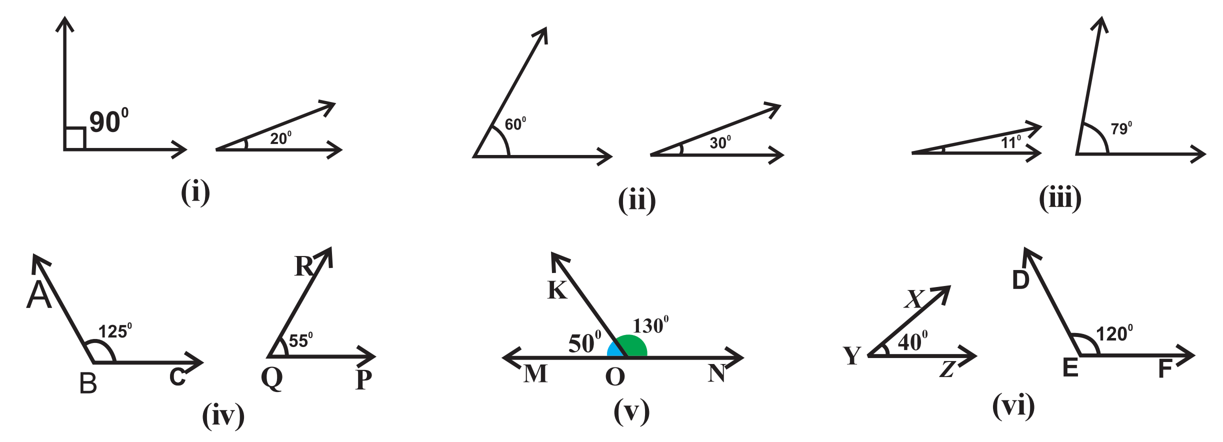
సంపూరక కోణాల మొత్తం = 180^0

మొదటి కోణం $= \frac{4}{9} \times 180^0 = 80^0$

రెండవ కోణం $= \frac{5}{9} \times 180^0 = 100^0$

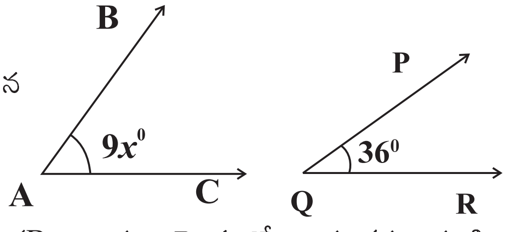
అభ్యాసం - 4.1

1. క్రింది కోణాల జతలలో ఏవి పూరక కోణాలు, ఏవి సంపూరక కోణాల జతలో కనుగొనండి?



2. రెండు పూరక కోణాల నిష్పత్తి 2 : 3 అయితే ఆ రెండు కోణాలను కనుగొనండి.

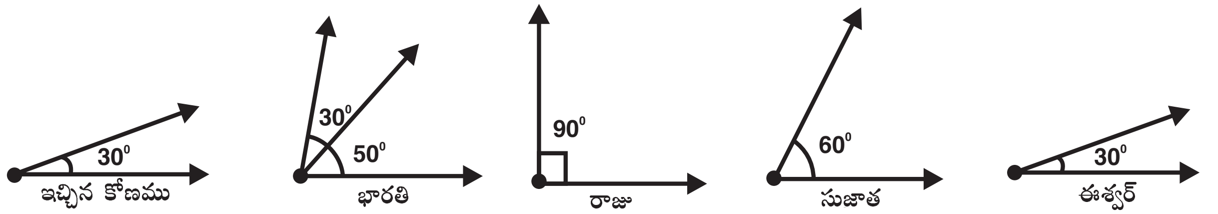
3. ఇచ్చిన పటంలో ∠A మరియు ∠Q లు పూరకకోణాలు అయిన x యొక్క విలువను కనుగొనండి.



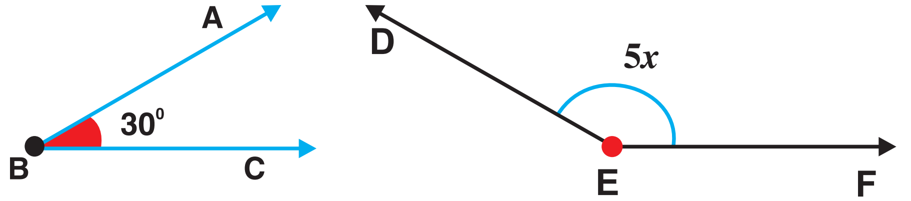
4. ∠A మరియు ∠B లు సంయుగ్మ కోణాలు మరియు ∠A = ∠B అయిన ఆ రెండు కోణాలను కనుగొనండి.

5. ఒక జత పూరక కోణాలు, ఒక జత సంపూరక కోణాల పటములను గీయండి.

6. ఉపాధ్యాయుడు తన విద్యార్థులకు ఒకకోణాన్ని ఇచ్చి ఆ కోణానికి పూరక కోణాన్ని గీయమని చెప్పెను. విద్యార్థులు క్రింది విధంగా గీచితిరి అయిన వారిలో ఎవరు సరైన విధంగా గీచెను?

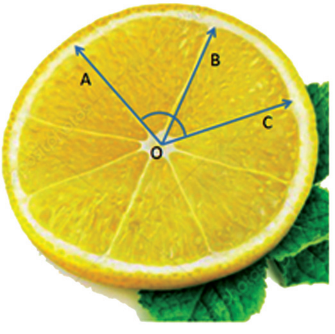


7. In the given figure ∠B and ∠E are supplementary angles. Find x.



8. Ashritha said, "In the pair of supplementary angles, one angle must be obtuse angle." Do you agree? Give reason.
9. Find the angle which is 40^0 more than its supplementary angle?
10. Srinu said, "Two obtuse angles cannot be supplementary." Do you agree? Justify your answer.

4.2 Adjacent angles:

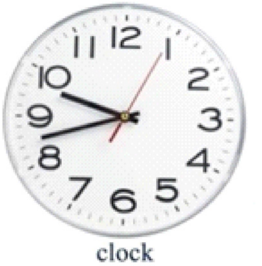


Look at the picture of lemon piece. What do you observe? At the center, we find many angles lying next to one another. Observe the angles ∠AOB and ∠BOC. What is the vertex of ∠AOB? What is the vertex of ∠BOC? Observe that 'O' is the common vertex of both angles. $\overrightarrow{OB}$ is the common arm of both angles, and both angles lie on either side of $\overrightarrow{OB}$. These are adjacent angles.

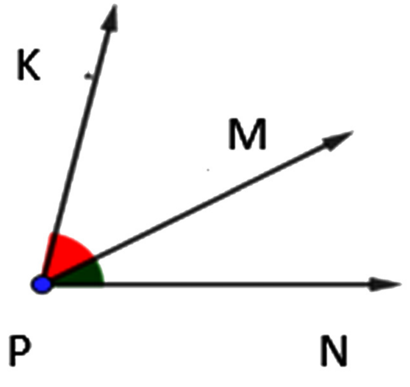
'Two angles are said to be adjacent angles, if they have a common vertex, common arm and lie on either side of the common arm.'

Observe the adjacent angles in the given pictures:

Bullock cart wheel



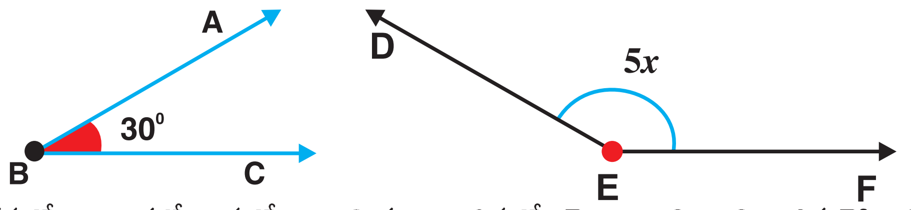
clock



In the figure, the common vertex of ∠KPM and ∠MPN is P. Common arm is $\overrightarrow{PM}$. Both angles ∠KPM and ∠MPN lie on either side of $\overrightarrow{PM}$. So, ∠KPM and ∠MPN is a pair of adjacent angles.

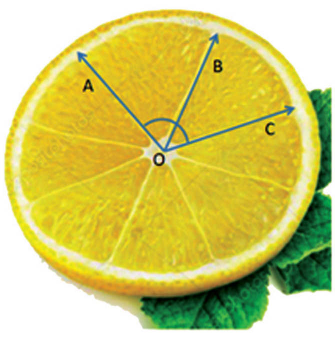
Note:
1. The interior of adjacent angles must have no common points.
2. The adjacent angles need not be complementary or supplementary.

7. ఇచ్చిన పటంలో $\angle B$ మరియు $\angle E$ లు సంపూరక కోణాలు అయిన x ను కనుగొనండి.



8. "సంపూరక కోణాల జతలో, ఒక కోణం ఖచ్చితంగా అధిక కోణమై ఉండాలి" అని ఆశ్రిత చెప్పింది. దీనిని నీవు అంగీకరిస్తావా? కారణం తెల్పండి.
9. ఒక కోణం దాని సంపూరక కోణం కంటే 40^0 ఎక్కువ, అయిన ఆ కోణాన్ని కనుగొనండి?
10. "రెండు అధికకోణాలు సంపూరక కోణాల జత కాలేవు" అని శ్రీను అన్నాడు. దీనిని మీరు అంగీకరిస్తారా? మీ సమాధానాన్ని సమర్థించండి.

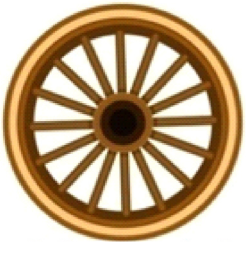
4.2 ఆసన్నకోణాలు :



ప్రక్కనున్న నిమ్మకాయ ముక్క చిత్రాన్ని చూడండి. మీరు ఏమి గమనించారు? మధ్యలో అనేక కోణాలు ఒకదాని పక్కన మరొకటి ఏర్పడడాన్ని మీరు గమనించవచ్చు. $\angle AOB$ మరియు $\angle BOC$ కోణాలను గమనించండి. $\angle AOB$ యొక్క శీర్షం ఏమిటి? $\angle BOC$ యొక్క శీర్షం ఏమిటి? రెండు కోణాల యొక్క ఉమ్మడి శీర్షం 'O' అని గమనించండి. రెండు కోణాల యొక్క ఉమ్మడి భుజం $\overrightarrow{OB}$ అని గమనించండి మరియు రెండు కోణాలు ఉమ్మడి భుజం $\overrightarrow{OB}$ కి చెరో వైపున కలవు అని గమనించండి. ఇవి ఒక జత ఆసన్న కోణాలు.

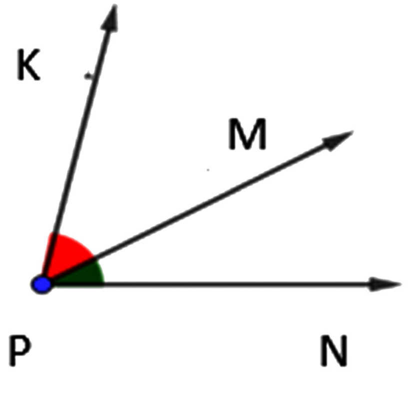
"రెండు కోణాలు ఉమ్మడి శీర్షం, ఉమ్మడి భుజం కలిగి ఆ రెండు కోణాలు ఉమ్మడి భుజంకి చెరోవైపున ఉన్నచో వాటిని ఆసన్నకోణాలు అంటారు."

ఇటువంటి ఆసన్న కోణాలను క్రింది ఇవ్వబడ్డ చిత్రాల్లో గమనించండి:



ఎద్దులబండి చక్రము

గడియారము



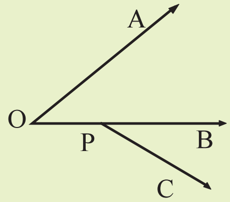
పటంలో, $\angle KPM$ మరియు $\angle MPN$ యొక్క ఉమ్మడి శీర్షం P మరియు ఉమ్మడి భుజం $\overrightarrow{PM}$. $\angle KPM$ మరియు $\angle MPN$ లు ఉమ్మడి భుజం $\overrightarrow{PM}$ కి చెరొక వైపున ఉన్నాయి. కనుక $\angle KPM$ మరియు $\angle MPN$ లు ఆసన్న కోణాలు అవుతాయి.

గమనిక: 1. ఆసన్న కోణాల అంతరంలలో ఉమ్మడి బిందువులు ఉండవు.

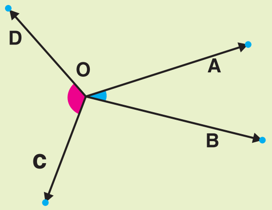
2. ఆసన్న కోణాలు పూరక కోణాలు గాని, సంపూరక కోణాలు గాని కావలసిన అవసరం లేదు.

Let's think

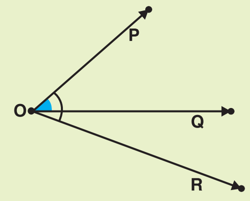
1. In the figure, ∠AOB and ∠BPC are not adjacent angles. Why? Give reason.



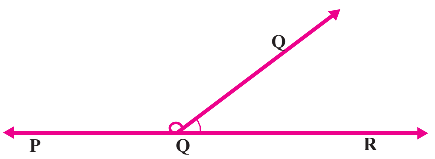
2. In the figure, ∠AOB and ∠COD have common vertex O. But ∠AOB, ∠COD are not adjacent angles. Why? Give reason.



3. In the figure, ∠POQ and ∠POR have common vertex O and common arm OP but ∠POQ and ∠POR are not adjacent angles. Why? Give reason.



4.2.1 Linear pair of angles:

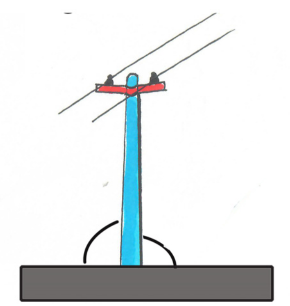


Look at the picture beside. Observe the angles formed on the PR. What are the adjacent angles here? ∠POQ and ∠QOR are adjacent angles. Observe that these angles are formed at a point on the line on the same side. What is the sum of these two angles? Their sum is 180^0. These are linear pair of angles.

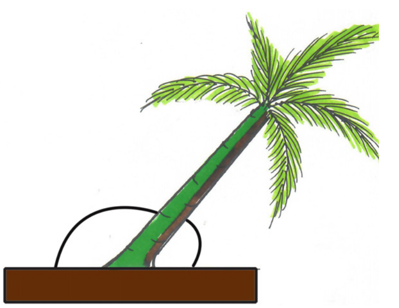
"A pair of adjacent angles whose sum is 180^0 are called linear pair of angles."

Observe the linear pair of angles in the given pictures:

Pen stand



Electrical pole



Tree

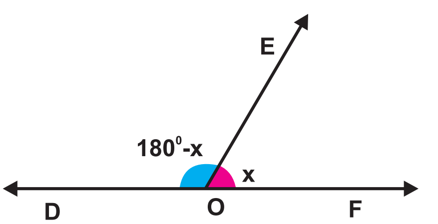
In the figure, $\overleftrightarrow{DF}$ is a straight line and O is a point on $\overleftrightarrow{DF}$. $\overrightarrow{OE}$ is a ray.

∠DOE, ∠EOF is a linear pair of angles.

If ∠EOF = x, then ∠DOE = $180^0 - x$

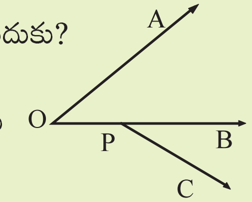
If ∠EOF = 40^0 then ∠DOE = $180^0 - 40^0 = 140^0$

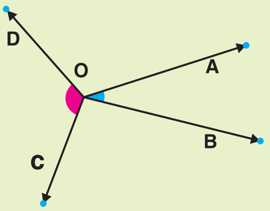
If ∠DOE = 83^0 then ∠EOF = $180^0 - 83^0 = 97^0$



ఆలోచిద్దాం!

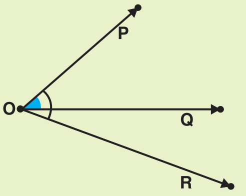
1. పటంలో $\angle AOB$ మరియు $\angle BPC$ లు ఆసన్న కోణాలు కావు. ఎందుకు? కారణం తెల్పండి.



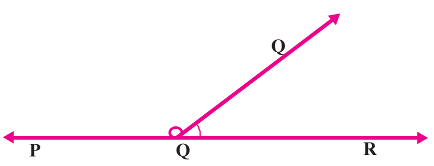
2. 

పటంలో, $\angle AOB$ మరియు $\angle COD$లకు ఉమ్మడి శీర్షం Oగా కలదు. $\angle AOB, \angle COD$ ఆసన్న కోణాలు కాదు. ఎందుకు? కారణం తెల్పండి.

3. పటంలో, $\angle POQ$ మరియు $\angle POR$లకు ఉమ్మడి శీర్షం O మరియు ఉమ్మడి భుజం OPగా కలవు. కానీ $\angle POQ$ మరియు $\angle POR$లు ఆసన్న కోణాలు కావు. ఎందుకు? కారణం తెల్పండి.



4.2.1. రేఖీయ కోణాల జత :

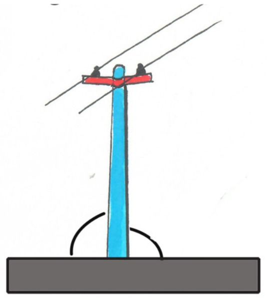


ప్రక్కనున్న చిత్రాన్ని చూడండి. PR పై ఏర్పడిన కోణాలను గమనించండి. వీటిలో ఆసన్న కోణాలు ఏమిటి? $\angle POQ$ మరియు $\angle QOR$లు ఆసన్న కోణాలు. ఈ రెండు కోణాలు సరళరేఖ పై ఒకే వైపున ఒకే బిందువు వద్ద ఏర్పడ్డాయని గమనించండి. ఈ రెండు కోణాల మొత్తం ఎంత ఉంటుంది? వాటి మొత్తం 180^0. ఇవి ఒక రేఖీయకోణాల జత.

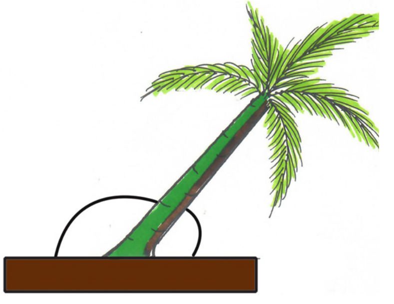
"రెండు ఆసన్న కోణాల మొత్తం 180^0 అయినచో వాటిని రేఖీయకోణాల జత లేదా రేఖీయద్వయం అని అంటారు."

ఇటువంటి రేఖీయకోణాల జతలను క్రింది ఇవ్వబడ్డ చిత్రాల్లో గమనించండి:

పెన్ స్టాండ్



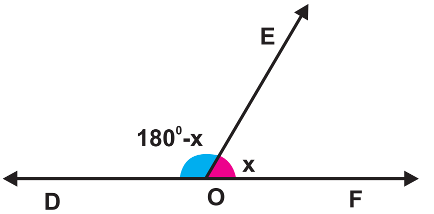
కరెంటు స్థంబం



చెట్టు

ప్రక్క పటం లో, $\overleftrightarrow{DF}$ ఒక సరళ రేఖ మరియు సరళ రేఖ $\overleftrightarrow{DF}$ పై O ఒక బిందువు. $\overrightarrow{OE}$ ఒక కిరణం.

ఇక్కడ $\angle DOE, \angle EOF$ లు రేఖీయ కోణాల జత.



$\angle EOF = x$ అయిన $\angle DOE = 180^0 - x$

$\angle EOF = 40^0$ అయిన $\angle DOE = 180^0 - 40^0 = 140^0$

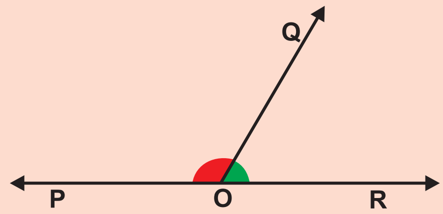
$\angle DOE = 83^0$అయిన $\angle EOF = 180^0 - 83^0 = 97^0$

Check Your Progress

1. In the figure $\overleftrightarrow{PR}$ is a straight line and O is a point on the line. $\overrightarrow{OQ}$ is a ray.

   i) If $\angle QOR = 50^0$, then what is $\angle POQ$?

   ii) If $\angle QOP = 102^0$, then what is $\angle QOR$?



Note: 1. The non-common arms of the linear pair of angles are two opposite rays and they lie on a straight line.

2. Linear pair of angles are supplementary.

Let's Explore

1. A linear pair of angles must be adjacent but adjacent angles need not be linear pair. Do you agree? Draw a figure to support your answer.
2. Mahesh said that the sum of two angles 30^0 and 150^0 is 180^0 hence they are linear pair. Do you agree? Draw a figure to support your answer.

Example 3: Find the linear pair of angles which are equal?

Solution: Let the equal linear pair of angles are x^0 and x^0

$$x^0 + x^0 = 180^0 \text{ (why?)}$$

$$2x^0 = 180^0$$

$$x^0 = \frac{180^\circ}{2}$$

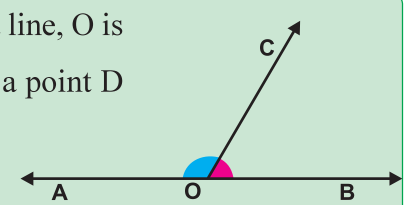
$$x^0 = 90^0$$

Hence, each angle = 90^0

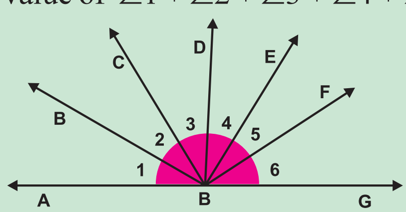
Let's think

i) In the given figure $\overleftrightarrow{AB}$ is a straight line, O is a point on $\overleftrightarrow{AB}$. $\overrightarrow{OC}$ is a ray. Take a point D in the interior of $\angle AOC$, join OD.

Find $\angle AOD + \angle DOC + \angle COB$?



ii) In the given figure, $\overleftrightarrow{AG}$ is a straight line. Find the value of $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 + \angle 6$?



Note : i) 'the sum of the angles at a point on the same side of the line is 180^o.'

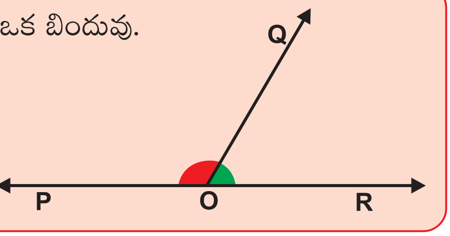
ii) 'the sum of all the angles at a point is 360^o.'

నీ ప్రగతిని తెలుసుకో

1. ప్రక్కపటం $\overleftrightarrow{PR}$ లో ఒక సరళ రేఖ మరియు సరళ రేఖ $\overleftrightarrow{PR}$ పై O ఒక బిందువు. $\overrightarrow{OQ}$ ఒక కిరణం

   i) $\angle QOR = 50^0$ అయిన $\angle POQ$ విలువ ఎంత?

   ii)) $\angle QOP = 102^0$ అయిన $\angle QOR$ విలువ ఎంత?



గమనిక: 1. రేఖీయ ద్వయం యొక్క ఉమ్మడి భుజం కాని భుజాలు రెండు వ్యతిరేక కిరణాలు మరియు అవి ఒకే సరళరేఖపై ఉంటాయి.

2. రేఖీయ కోణాల జత సంపూరకాలు.

అన్వేషిద్దాం

1. రేఖీయద్వయం ఎల్లప్పుడూ ఆసన్నకోణాలు అవుతాయి. కానీ ఆసన్నకోణాలు ఎల్లప్పుడూ రేఖీయద్వయం కావలసిన అవసరం లేదు. మీరు అంగీకరిస్తారా? మీ సమాధానాన్ని సమర్థించుటకు ఒక పటాన్ని గీయండి.
2. రెండు కోణాలు 30^0 మరియు 150^0ల మొత్తం 180^0 కనుక అవి రేఖీయద్వయం అవుతాయి అని మహేష్ చెప్పాడు. దీనిని నీవు అంగీకరిస్తావా? మీ సమాధానాన్ని సమర్థించండి.

ఉదాహరణ 3: ఒకదానితో మరొకటి సమానంగా ఉండే రేఖీయ కోణాల జతను కనుగొనండి?

సాధన: సమానంగా గల రేఖీయకోణాల జతను x^0 మరియు x^0 అని అనుకొనుము.

$x^0 + x^0 = 180^0$ (ఎందుకు?)

$2x^0 = 180^0$

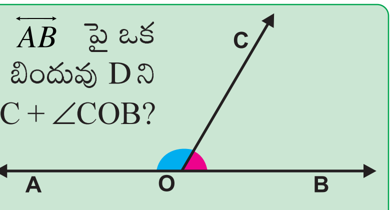
$$x^0 = \frac{180^\circ}{2}$$

$x^0 = 90^0$

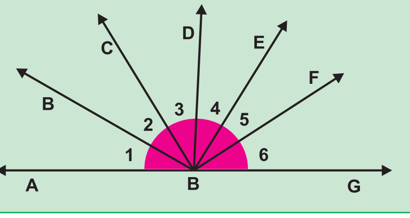
కనుక, ఒక్కొక్క కోణం $= 90^0$

ఆలోచిద్దాం!

i) ప్రక్క పటంలో $\overleftrightarrow{AB}$ ఒక సరళరేఖ, సరళరేఖ $\overleftrightarrow{AB}$ పై ఒక బిందువు $\overrightarrow{OC}$ ఒక కిరణం. $\overrightarrow{OC}$ అంతరంలో బిందువు D ని తీసుకొని, OD కలపండి. $\angle AOD + \angle DOC + \angle COB$? విలువ కనుగొనండి?



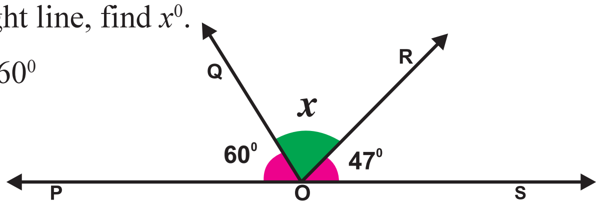
ii) ప్రక్క పటంలో $\overleftrightarrow{AG}$ ఒక సరళరేఖ, $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 + \angle 6$ విలువ కనుగొనండి?



గమనిక: i) "సరళరేఖపై ఒక బిందువు వద్ద ఆ రేఖకు ఒకే వైపున గల కోణాల మొత్తం 180^0 అవుతుంది."

ii) 'ఒక బిందువు వద్ద గల అన్ని కోణాల మొత్తం 360^0'.

Example 4 : In the given figure, $\overleftrightarrow{PS}$ is a straight line, find x^0.



Solution: From the given figure, $\angle POQ = 60^0$

$\angle QOR = x^0$

$\angle ROS = 47^0$

But $\angle POQ + \angle QOR + \angle ROS = 180^0$ (why?)

$60^0 + x^0 + 47^0 = 180^0$

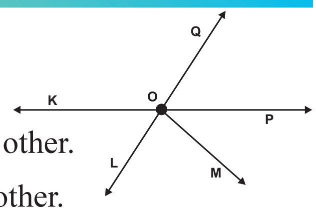
$x^0 + 107^0 = 180^0$

$x^0 = 180^0 - 107^0$

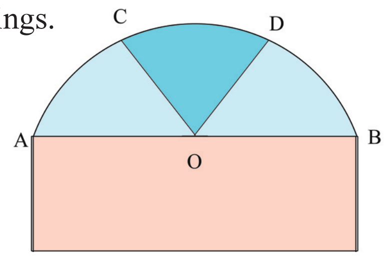
$x^0 = 73^0$

Exercise - 4.2

1. Observe the given figure and write any 2 linear pairs of angles.



2. Draw a pair of adjacent angles which are complementary to each other.
3. Draw a pair of adjacent angles which are supplementary to each other.
4. Give any two examples of adjacent angles in your surroundings.
5. Observe the figure and write the adjacent angles.

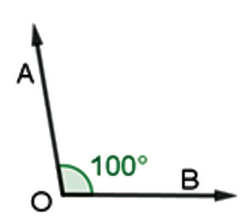


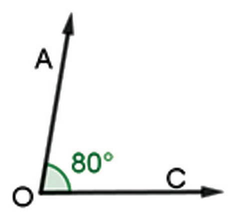
6. Is it possible for the following pair of angles to form a linear pair? If yes, draw them. If not, give reason.

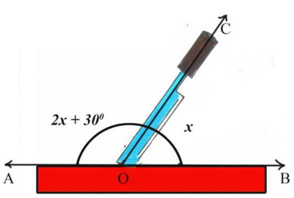
   i) $120^0, 60^0$ ii) $98^0, 102^0$

7. Draw the following angles as linear pair.

   Write the straight line and common arm.





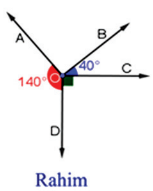


vegetable cutter

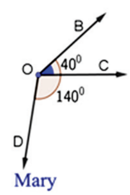
8. In the given figure, $\overleftrightarrow{AB}$ is a straight line.

   O is a point on $\overleftrightarrow{AB}$. Find the value of x.

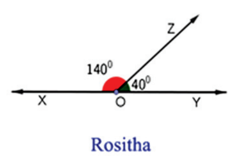
9. Teacher asked students to check whether 40^0 and 140^0 form a linear pair or not by drawing angles. The students have drawn as follows. Who will get correct answer?



Rahim

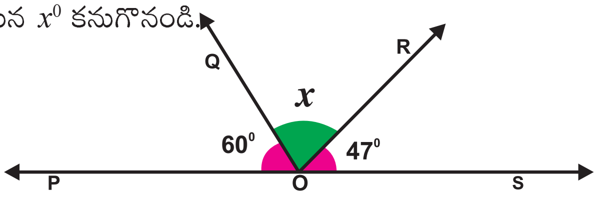


Mary



Rositha

ఉదాహరణ 4: ఇచ్చిన పటంలో $\overleftrightarrow{PS}$ ఒక సరళరేఖ అయిన x^0 కనుగొనండి.



సాధన: ఇచ్చిన పటం నుండి, $\angle POQ = 60^0$

$\angle QOR = x^0$

$\angle ROS = 47^0$

$\angle POQ + \angle QOR + \angle ROS = 180^0$ (ఎందుకు?)

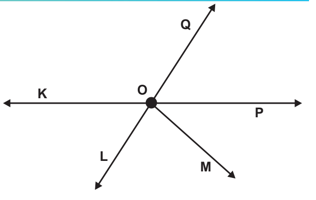
$60^0 + x^0 + 47^0 = 180^0$

$x^0 + 107^0 = 180^0$

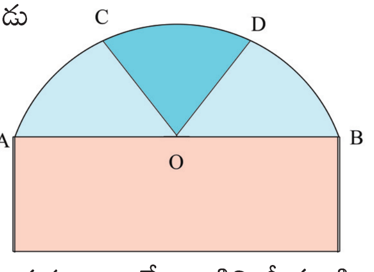
$x^0 = 180^0 - 107^0$

$x^0 = 73^0$

అభ్యాసం - 4.2



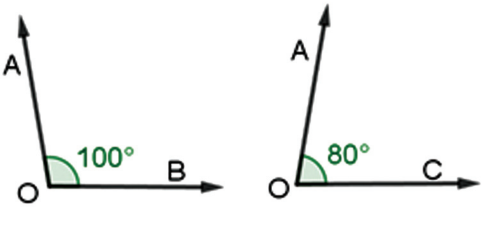
1. ఇచ్చిన పటాన్ని గమనించండి మరియు 2 రేఖీయ కోణాల జతలను రాయండి.
2. ఒకదానికొకటి పూరక కోణాలయ్యే ఆసన్న కోణాల జతను గీయండి.
3. ఒకదానికొకటి సంపూరక కోణాలయ్యే ఆసన్న కోణాల జతను గీయండి.
4. మీ పరిసరాలలో నీవు గమనించే ఆసన్న కోణాలకు సంబంధించి ఏవైనా రెండు ఉదాహరణలు ఇవ్వండి.

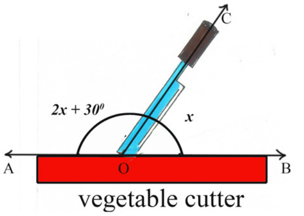


5. పటంను పరిశీలించండి. వీలయ్యే ఆసన్న కోణాల జతలను రాయండి.
6. ఇచ్చిన కోణాల జత రేఖీయ ద్వయం అయ్యే అవకాశం వుందా? ఒకవేళ అవును అయితే, వాటిని గీయండి. ఒకవేళ లేనట్లయితే, కారణం ఇవ్వండి.

   i) $120^0, 60^0$ ii) $98^0, 102^0$

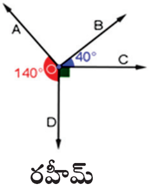
7. క్రింది కోణాలను రేఖీయద్వయంగా గీయండి. అందులో గల సరళరేఖను మరియు ఉమ్మడిభుజాన్ని వ్రాయండి.



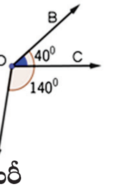


vegetable cutter

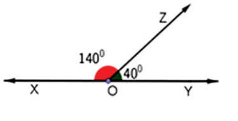
8. ఇచ్చిన పటంలో $\overleftrightarrow{AB}$ ఒక సరళరేఖ. $\overleftrightarrow{AB}$ పై O ఒక బిందువు. x విలువ కనుక్కోండి.
9. 40^0 మరియు 140^0 కోణాలు రేఖీయ ద్వయంను ఏర్పరుస్తాయో లేదో పటం గీచి సరిచూడమని ఒక టీచరు తన విద్యార్థులకు చెప్పెను. ఆ విద్యార్థులు క్రింది విధంగా పటం గీచెను. అయిన ఎవరికి సరియైన సమాధానం వచ్చును?



రహీమ్

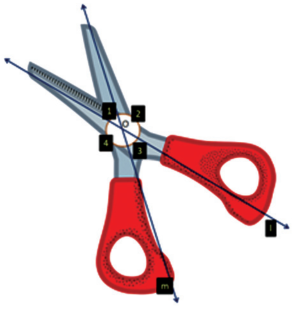


మేరీ



రోషిత

4.3 Vertically opposite angles:



Look at the picture of scissors. Observe the angles marked in the picture. How many angles do you observe in the scissors? What are they? The angles are $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$ and $\angle 4$.

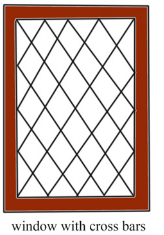
Is there any angle which is not linear pair to $\angle 1$? Yes, it is $\angle 3$, which is exactly opposite to $\angle 1$. These are vertically opposite angles.

'When two straight lines intersect each other, the pair of opposite angles formed at the point of intersection are called as vertically opposite angles.'

Here, in scissors two lines 'l' and 'm' intersect each other at point O. $\angle 1$, $\angle 3$ is a pair of vertically opposite angles. And $\angle 2$, $\angle 4$ is another pair of vertically opposite angles.

Observe the pair of vertically opposite angles in the given pictures.

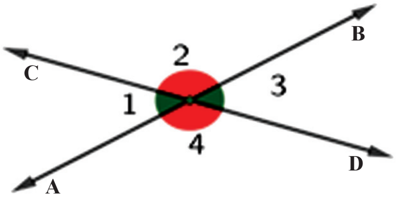
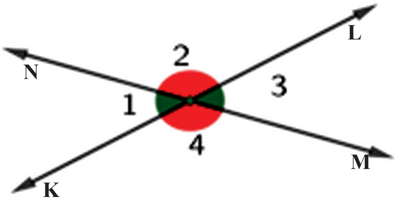
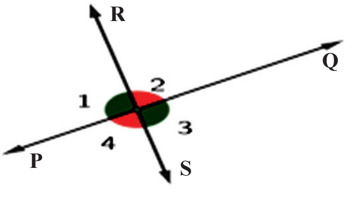
Glass Table


window with cross bars

Cross roads

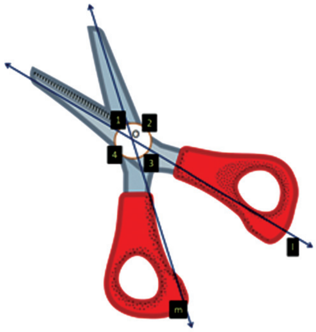
Let us learn an important property of vertically opposite angles through an activity.

Take a white paper. Draw 3 distinct pairs of intersecting lines on this paper. Measure the angles so formed and fill the table.

S.No.	Figure on white paper	Vertically opposite angles	Equal or not equal
1		$\angle 1$ = $\angle 3$ =	
		$\angle 2$ = $\angle 4$ =	
2		$\angle 1$ = $\angle 3$ =	
		$\angle 2$ = $\angle 4$ =	
3		$\angle 1$ = $\angle 3$ =	
		$\angle 2$ = $\angle 4$ =	

From the above table, we observe that *"vertically opposite angles are equal."*

4.3 శీర్షాభిముఖకోణాలు:



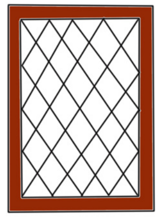
ప్రక్కనున్న కత్తెర యొక్క చిత్రాన్ని చూడండి. పటంలో గుర్తించిన కోణాలను గమనించండి. కత్తెరలో ఎన్ని కోణాలను మీరు గమనించారు? అవి ఏమిటి? అవి $\angle 1, \angle 2, \angle 3, \angle 4$ కోణాలు.

$\angle 1$ కు రేఖీయ ద్వయం కాని కోణం ఏదైనా ఉన్నదా? అవును వుంది. అది $\angle 1$ కు సరిగ్గా ఎదురుగా గల కోణం $\angle 3$. ఇవి ఒక జత శీర్షాభిముఖ కోణాలు అవుతాయి.

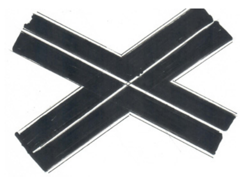
"రెండు సరళరేఖలు ఒకదానికొకటి ఖండించుకొన్నప్పుడు, ఆ ఖండన బిందువు వద్ద ఏర్పడిన అభిముఖకోణాల జతను శీర్షాభిముఖ కోణాలు అని అంటారు."

కత్తెర పటంలో 'l' మరియు 'm' అనే రెండు రేఖలు ఒకదానితో మరొకటి O బిందువు వద్ద ఖండించుకొన్నవి. ఇక్కడ $\angle 1, \angle 3$ లు ఒక జత శీర్షాభిముఖ కోణాలు. $\angle 2, \angle 4$ అనేది మరో జత శీర్షాభిముఖ కోణాలు. ఇటువంటి శీర్షాభిముఖ కోణాల జతలను క్రింది ఇవ్వబడ్డ చిత్రాల్లో గమనించండి.

అద్దం గల టేబులు



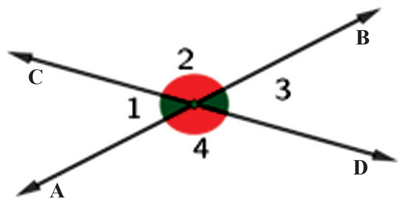
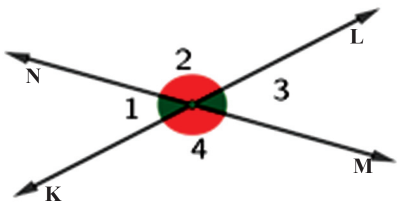
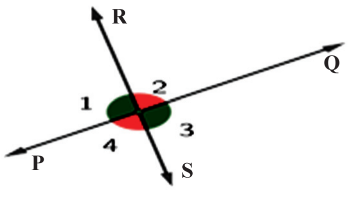
అడ్డు గీతల గల కిటికి



అడ్డ రోడ్లు

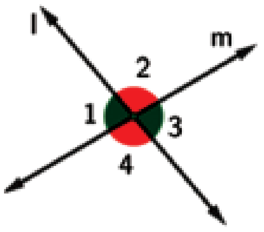
ఇప్పుడు మనం శీర్షాభిముఖ కోణాల యొక్క ఒక ముఖ్యమైన ధర్మాన్ని ఒక కృత్యం ద్వారా నేర్చుకుందాం.

ఒక తెల్ల కాగితం తీసుకోండి. ఈ కాగితంపై 3 విభిన్న జతల ఖండన రేఖలను గీయండి. అలా ఏర్పడిన కోణాలను కొలిచి పట్టికలో నింపండి.

క్ర.సం.	తెల్ల కాగితంపై పటం	శీర్షాభిముఖ కోణాలు	సమానమా? కాదా?
1		$\angle 1 =$ $\angle 3 =$	
		$\angle 2 =$ $\angle 4 =$	
2		$\angle 1 =$ $\angle 3 =$	
		$\angle 2 =$ $\angle 4 =$	
3		$\angle 1 =$ $\angle 3 =$	
		$\angle 2 =$ $\angle 4 =$	

పై పట్టిక నుంచి **"శీర్షాభిముఖ కోణాలు సమానం"** అని గమనించగలరు.

We can prove this property as follows.



In the figure, lines l and m intersect at O.

Let the angles formed be $\angle 1, \angle 2, \angle 3$ and $\angle 4$

$\angle 1 + \angle 4 = 180^0$ (why?)

$\angle 3 + \angle 4 = 180^0$ (why?)

$\angle 1 + \angle 4 = \angle 3 + \angle 4$

$\therefore \quad \angle 1 = \angle 3$, Similarly, $\angle 2 = \angle 4$

Hence, we conclude that the pair of vertically opposite angles are equal.

Example 5: Observe the figure, then find x, y and z.

Solution: From the figure, $x = 110^0$ (vertically opposite angles are equal)

$y + 110^0 = 180^0$ (why?)

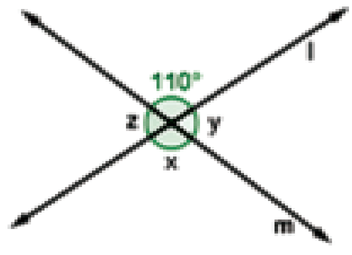
$y = 180^0 - 110^0$

$= 70^0$

$z = y$ (why?)

$z = 70^0$

Hence $x = 110^0$, $y = 70^0$ and $z = 70^0$



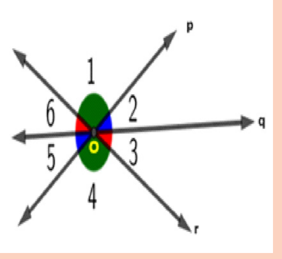
Check Your Progress

In the figure three lines p, q and r intersect at a point O. Observe the angles in the figure. Write answers to the following.

i) What is the vertically opposite angle to $\angle 1$?

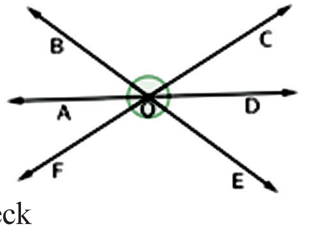
ii) What is the vertically opposite angle to $\angle 6$?

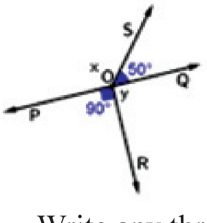
iii) If $\angle 2 = 50^0$, then what is $\angle 5$?



Exercise - 4.3

1. Name three pairs of vertically opposite angles in the figure.
   If $\angle AOB = 45^0$. then find $\angle DOE$.

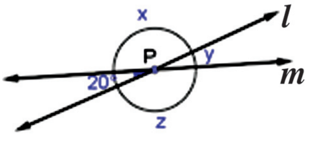




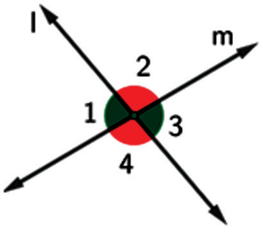
2. In the given figure $\overleftrightarrow{PQ}$ is a straight line. Check whether x and y are vertically opposite angles or not? Give reason.

3. Write any three examples for vertically opposite angles in your surroundings.

4. In the given figure, the lines l and m intersect at point P. Observe the figure and find the values of x, y and z.



ఈ ధర్మాన్ని మనం ఈ క్రింది విధంగా నిరూపించవచ్చు.



పటంలో సరళరేఖలు l మరియు m లు బిందువు O వద్ద ఖండించుచున్నవి. అని అనుకొనుము.

అప్పుడు ఏర్పడిన కోణాలు $\angle 1, \angle 2, \angle 3$ మరియు $\angle 4$ అనుకొనుము.

$\angle 1 + \angle 4 = 180^0$ (ఎందుకు?)

$\angle 3 + \angle 4 = 180^0$ (ఎందుకు?)

$\angle 1 + \angle 4 = \angle 3 + \angle 4$

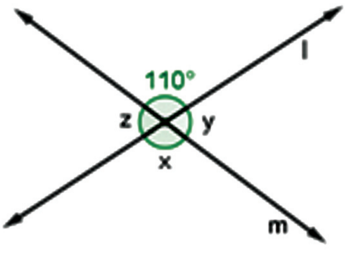
$\therefore \angle 1 = \angle 3$

ఇదే విధంగా, $\angle 2 = \angle 4$

కనుక, శీర్షాభిముఖ కోణాలు సమానం అని మనం నిర్ధారించవచ్చు.

ఉదాహరణ 5: ప్రక్కనున్న పటాన్ని గమనించి x, y మరియు z విలువలను కనుగొనండి.

సాధన: పటం నుండి, $x = 110^0$ (శీర్షాభిముఖ కోణాలు సమానం)



$y + 110^0 = 180^0$ (ఎందుకు?)

$y = 180^0 - 110^0$

$= 70^0$

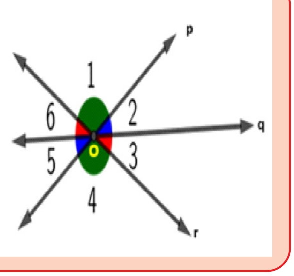
$z = y$ (ఎందుకు?)

$z = 70^0$

కనుక, $x = 110^0, y = 70^0$ (మరియు) $z = 70^0$

నీ ప్రగతిని తెలుసుకో

పటంలో మూడు సరళరేఖలు p, q మరియు r లు ఒక బిందువు O వద్ద ఖండించుకొనినవి. పటంలో కోణాలను పరిశీలించండి. క్రింది ప్రశ్నలకు సమాధానాలు రాయండి.



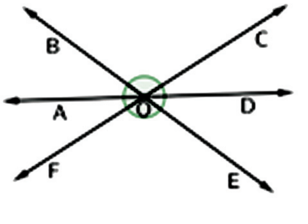
i) $\angle 1$ కి శీర్షాభిముఖకోణం ఏది?

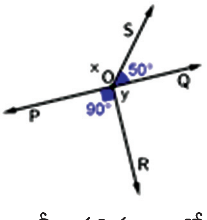
ii) $\angle 6$ కి శీర్షాభిముఖకోణం ఏది?

iii) $\angle 2 = 50^0$ అయిన $\angle 5$ విలువ ఎంత?

అభ్యాసం - 4.3

1. పటం నుండి మూడు జతల శీర్షాభిముఖ కోణాల జతల పేర్లను పేర్కొనండి. పటంలో $\angle AOB = 45^0$ అయిన $\angle DOE$ కనుగొనండి.

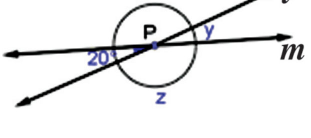




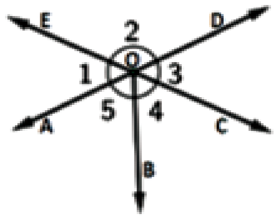
2. ఇచ్చిన పటంలో $\overleftrightarrow{PQ}$ ఒక సరళరేఖ. x మరియు y లు శీర్షాభిముఖ కోణాలు అవుతాయో లేదో సరిచూడండి. కారణం తెల్పండి.

3. మీ పరిసరాలలో శీర్షాభిముఖ కోణాలుకు మూడు ఉదాహరణలను రాయండి.

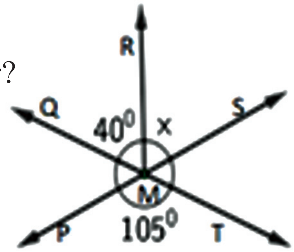
4. ఇచ్చిన పటంలో సరళరేఖలు l మరియు m లు బిందువు P వద్ద ఖండించుకొనుచున్నవి. పటాన్ని పరిశీలించి x, y మరియు z లు విలువలను కనుగొనండి.



5. In the given figure, two lines $\overleftrightarrow{AD}$ and $\overleftrightarrow{EC}$ intersects at O. Name two pairs of vertically opposite angles in the given figure.



6. Two lines $\overleftrightarrow{PS}$ and $\overleftrightarrow{QT}$ intersect at M. Observe the figure and find x?



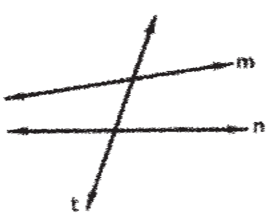
4.4 Angles made by a transversal :

While you enter into the school, do you observe that the school entrance gate often designed with iron bars that are arranged in horizontal and vertical order, which looks beautiful? You might have seen the railway track, the cement bars arranged vertical to the railway track. In ladder, the wooden bars are arranged horizontally to the vertical poles. In construction of building, the beams which are made up of iron and cement are arranged in the same way. These situations explain the concept of a Transversal.

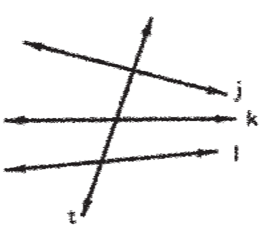
Look at the following pictures to understand Transversal concept.

A transversal is a straight line that intersect two or more straight lines at distinct points.

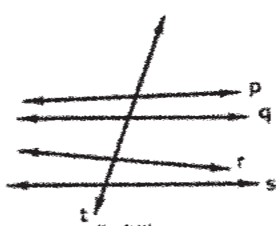
Observe the following figures.



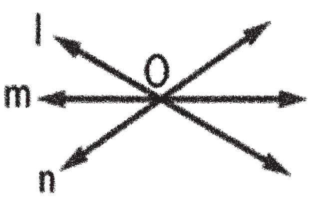
fig(i)



fig(ii)



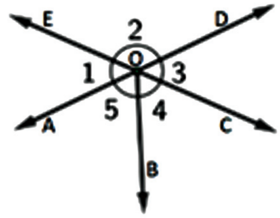
fig(iii)



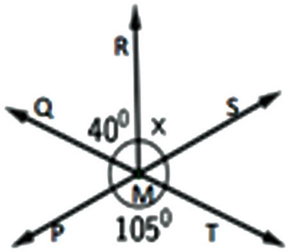
fig(iv)

In figure i) the line t intersects the lines m and n at two distinct points.
In figure ii) the line t intersects three lines j, k and l at three distinct points.
In figure iii) the line t intersects four lines p, q, r and s at four distinct points.
In all the above three cases, we say that the line t is a transversal.
In figure iv) the lines l, m and n intersect at one point O.
Hence, there is no transversal in figure iv.

5. ఇచ్చిన పటంలో రెండు సరళరేఖలు $\overleftrightarrow{AD}$ మరియు $\overleftrightarrow{EC}$ లు బిందువు O వద్ద ఖండించుకొన్నది. ఇచ్చిన పటం నుండి రెండు జతల శీర్షాభిముఖ కోణాల పేర్లను పేర్కొనండి.



6. రెండు సరళరేఖలు $\overleftrightarrow{PS}$ మరియు $\overleftrightarrow{QT}$ లు బిందువు M వద్ద ఖండించుకొన్నవి. పటాన్ని పరిశీలించి x ను కనుగొనండి.



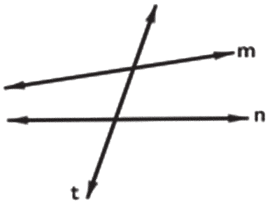
4.4 తిర్యగ్‌రేఖచే ఏర్పడు కోణాలు:

మీరు పాఠశాల లోనికి ప్రవేశించేటప్పుడు, పాఠశాల ప్రవేశ ద్వారం ఇనుపకడ్డీలతో రూపకల్పన చేసి క్షితిజ సమాంతరంగా మరియు నిలువుగా క్రమంలో అమర్చబడి అందంగా కనబడుట గమనించారా? మీరు రైల్వే ట్రాక్ గమనించినచో, రైల్వే ట్రాక్‌కు అడ్డంగా అమర్చిన సిమెంట్ దిమ్మలను మీరు చూసి ఉంటారు. నిచ్చెనలో కూడా నిలువు స్తంభాలకు చెక్క కడ్డీలు అడ్డంగా అమర్చబడివుంటాయి. అదే విధంగా భవన నిర్మాణంలో కూడా ఇనుప ఊచలు, సిమెంట్‌లతో తయారుచేసిన దూలాలను (బీమ్) నిలువుగా మరియు అడ్డంగా నిర్మించడాన్ని గమనించారా? ఈ సందర్భాలన్నియు తిర్యగ్‌రేఖ భావనను వివరిస్తాయి.

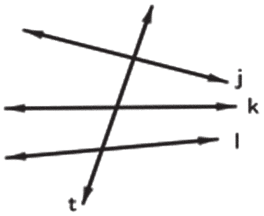
తిర్యగ్‌రేఖ భావనను అర్థం చేసుకోవడం కొరకు దిగువ చిత్రాలను చూడండి.

"రెండు లేదా అంతకంటే ఎక్కువ సరళరేఖలను విభిన్న బిందువుల వద్ద ఖండించే సరళరేఖను తిర్యగ్రేఖ అంటారు."

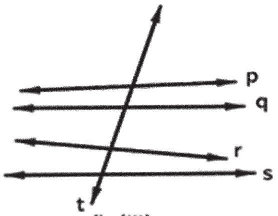
క్రింది పటాలను గమనించండి.



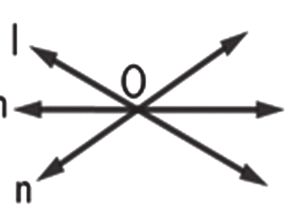
fig(i)



fig(ii)

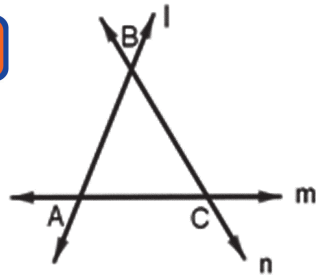


fig(iii)



fig(iv)

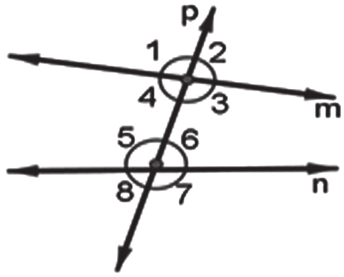
పటం i) లో సరళరేఖలు m మరియు n లను మరో సరళరేఖ t రెండు విభిన్న బిందువుల వద్ద ఖండించినది.
పటం ii) లో సరళరేఖలు j, k మరియు l లను మరో సరళరేఖ t మూడు విభిన్న బిందువుల వద్ద ఖండించినది.
పటం iii) లో సరళరేఖలు p, q, r మరియు s లను మరో సరళరేఖ t నాలుగు విభిన్న బిందువుల వద్ద ఖండించినది.
పైన పేర్కొన్న మూడు సందర్భాల్లోనూ సరళరేఖ t ని తిర్యగ్‌రేఖ అని అంటాము.
పటం iv) లో సరళరేఖలు l, m మరియు n రేఖలు ఒకే బిందువు O వద్ద ఖండించుకొనుచున్నవి.
కనుక ఈ సందర్భంలో తిర్యగ్‌రేఖ లేదు అని అంటాము.



i) In the figure, the line *l* intersects other two lines *m* and *n* at A and B respectively. Hence *l* is a transversal. Is there any other transversal in the figure? Give reason.

ii) How many transversals can be drawn for the given pair of lines?

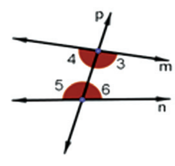
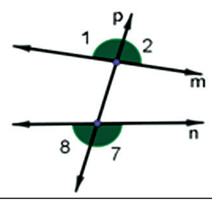
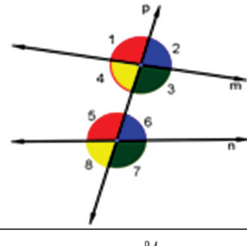
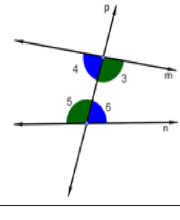
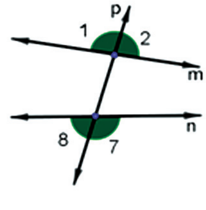
Angles made by a transversal:

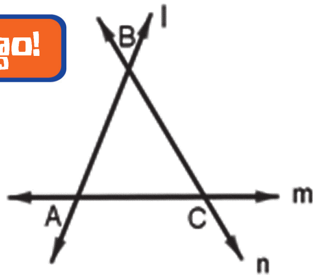


When a transversal *p* intersects two lines *m* and *n* at two distinct points, then 8 angles will be formed as shown in the figure.

In the figure, let the angles formed by the transversal be ∠1, ∠2, ∠3, ∠4, ∠5, ∠6, ∠7 and ∠8.

Now let us learn about various pairs of angles formed by a transversal.

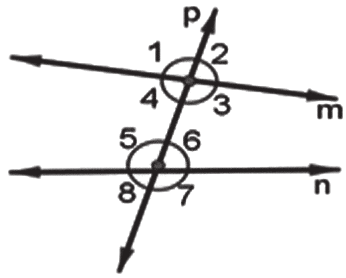
S.No.	Types of angles	Figure	Angles in the figure
1	**Interior angles :** Angles in between the lines *m* and *n*		∠3, ∠4, ∠5, ∠6
2	**Exterior angles :** Angles that are not in between the lines *m* and *n*		∠1, ∠2, ∠7, ∠8
3	**Corresponding angles:** Two angles which are on the same side of transversal, one interior and other exterior but not adjacent angles are pair of corresponding angles.		Four pairs (∠1, ∠5), (∠4, ∠8), (∠2, ∠6), (∠3, ∠7)
4	**Alternate interior angles :** Interior angles on either side of the transversal but not adjacent angles are alternate interior angles.		Two pairs (∠4, ∠6), (∠3, ∠5)
5	**Alternate exterior angles :** Exterior angles on either side of the transversal but not adjacent angles are alternate exterior angles.		Two pairs (∠1, ∠7), (∠2, ∠8)



i) పటంలో సరళరేఖ l మిగిలిన రెండు సరళరేఖలు m, n లను వరసగా A మరియు B బిందువుల వద్ద ఖండించినది. అందువల్ల l ఒక తిర్యగ్రేఖ అవుతుంది. పటంలో ఇంకా ఏమైనా తిర్యగ్రేఖలు ఉన్నాయా? కారణం తెల్పండి.

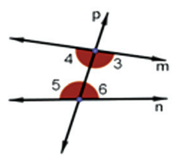
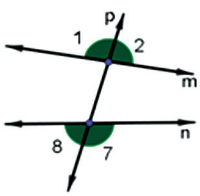
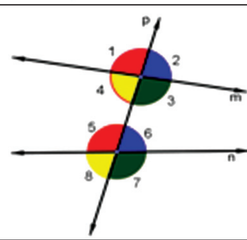
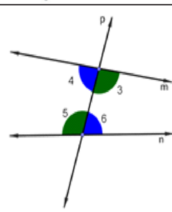
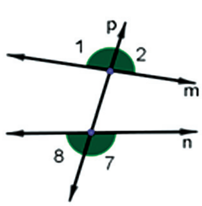
ii) ఒక జత సరళరేఖలకు ఎన్ని తిర్యగ్రేఖలను గీయవచ్చు?

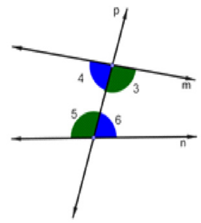
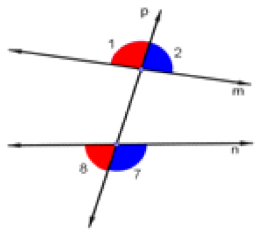
తిర్యగ్రేఖచే ఏర్పడు కోణాలు:



రెండు సరళరేఖలు m మరియు n లను ఒక తిర్యగ్రేఖ p, రెండు విభిన్న బిందువుల వద్ద ఖండించినప్పుడు, పటంలో చూపించిన విధంగా 8 కోణాలు ఏర్పడును. పటంలో తిర్యగ్రేఖచే ఏర్పడిన కోణాలు $\angle 1, \angle 2, \angle 3, \angle 4, \angle 5, \angle 6, \angle 7$ మరియు $\angle 8$ అని అనుకొనుము.

ఇప్పుడు, మనం తిర్యగ్రేఖచే ఏర్పడిన వివిధ కోణాల జతలను గురించి నేర్చుకుందాం.

క్ర.సం.	కోణాలజతలు రకము	పటము	పటంలో కోణాలు
1	**అంతరకోణాలు:** సరళరేఖలు m మరియు n ల మధ్య నున్న కోణాలు		$\angle 3, \angle 4, \angle 5, \angle 6$
2	**బాహ్యకోణాలు :** సరళరేఖలు m మరియు n మధ్య లేని కోణాలు		$\angle 1,\ \angle 2,\ \angle 7,\ \angle 8$
3	**సదృశకోణాలు:** తిర్యగ్రేఖకు ఒకే వైపున వుండి, ఒకటి అంతరంలో మరొకటి బాహ్యంగా ఉంటూ, ఆసన్న కోణాలు కాని వాటిని సదృశకోణాలు అంటారు.		నాలుగు జతలు ($\angle 1, \angle 5$), ($\angle 4, \angle 8$), ($\angle 2, \angle 6$), ($\angle 3, \angle 7$)
4	**ఏకాంతరకోణాలు:** తిర్యగ్రేఖకు చెరోక వైపున వుంటూ, ఆసన్న కోణాలు కాని, అంతర కోణాలను ఏకాంతర కోణాలు అంటారు.		రెండు జతలు ($\angle 4, \angle 6$), ($\angle 3, \angle 5$)
5	**ఏకబాహ్యకోణాలు:** తిర్యగ్రేఖకు చెరొక వైపున వుంటూ, ఆసన్న కోణాలు కాని, బాహ్యకోణాలను ఏక బాహ్యకోణాలు అంటారు.		రెండు జతలు ($\angle 1, \angle 7$), ($\angle 2, \angle 8$)

S.No	Types of angles	Figure	Angles in the figure
6	**Co-interior angles :** Interior angles on same side of transversal are co-interior angles.		Two pairs (∠3, ∠6), (∠4, ∠5)
7	**Co-exterior angles:** Exterior angles on same side of transversal are co-exterior angles.		Two pairs (∠2, ∠7), (∠1, ∠8)

Check Your Progress Observe the figures i) and ii) then fill the table.

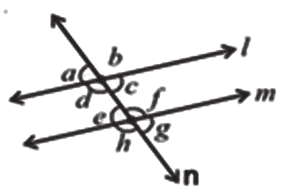


Figure (i)

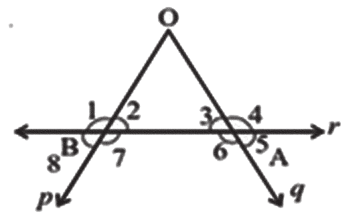


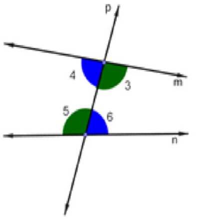
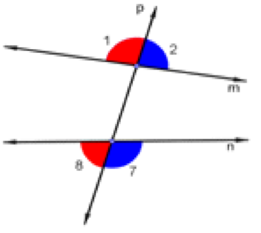
Figure (ii)

Figure	Transversal	Exterior angles	Interior angles	Pairs of corresponding angles	Pairs of alternative interior angles	Pairs of alternative exterior angles
(i)	*n*			∠a, ∠e ∠b, ∠f ∠c, ∠g ∠d, ∠h		
(ii)		∠1, ∠4, ∠5, ∠8				

4.4.1 Transversal on parallel lines :

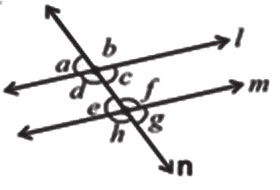
Two coplanar lines which do not intersect at any point are called as parallel lines.

In the picture, the horizontal bars of window represent parallel lines and the vertical bar which intersect horizontal bars represent a transversal.

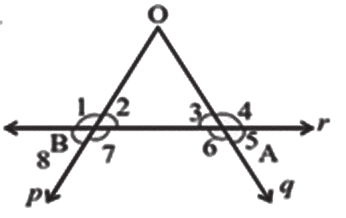
క్ర.సం.	కోణాలజతలు రకము	పటము	పటంలో కోణాలు
6	**సహ అంతర్ కోణాలు :** తిర్యగ్రేఖకు ఒకే వైపున గల అంతర కోణాలు సహ అంతర కోణాలు అగును.		రెండు జతలు ($\angle 3$, $\angle 6$), ($\angle 4$, $\angle 5$)
7	**సహ బాహ్య కోణాలు :** తిర్యగ్రేఖకు ఒకే వైపున గల బాహ్య కోణాలు సహ బాహ్య కోణాలు అగును.		రెండు జతలు ($\angle 2$, $\angle 7$), ($\angle 1$, $\angle 8$)

నీ ప్రగతిని తెలుసుకో

పటం (i) మరియు (ii) లను గమనించి పట్టికను పూరించండి.



పటం (i)



పటం (ii)

పటం	తిర్యగ్రేఖ	బహ్యకోణాలు	అంతర కోణాలు	సదృశ కోణాల జతలు	ఏకాంతర కోణాల జతలు	ఏకబాహ్య కోణాల జతలు
(i)	n			$\angle$a, $\angle$e $\angle$b, $\angle$f $\angle$c, $\angle$g $\angle$d, $\angle$h		
(ii)		$\angle 1$, $\angle 4$, $\angle 5$, $\angle 8$				

4.5 సమాంతర రేఖలపై తిర్యగ్రేఖ :

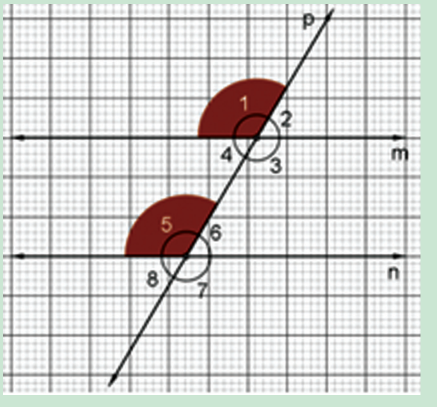
ఒకే తలంలోని రెండు సరళరేఖలు ఖండించు కొననిచో వాటిని సమాంతరరేఖలు అని అంటారు. ప్రక్కచిత్రంలో, కిటికీకి అడ్డంగా అమర్చిన ఊచలు సమాంతరరేఖలను సూచిస్తే వాటిని ఖండిస్తూ నిలువుగా ఉన్న ఊచ, తిర్యగ్రేఖను సూచిస్తుంది.

Now let us know the properties of pair of angles formed when a transversal intersect a pair of parallel lines.

1. Property of corresponding angles:

Now let us know the property of corresponding angles through an activity.

Take a graph sheet. Draw a pair of parallel lines *m* and *n* and draw a transversal *p* which intersects '*m*' and '*n*' at two distinct points on a graph sheet. Let the angles formed be ∠1, ∠2, ∠3, ∠4, ∠5, ∠6, ∠7 and ∠8 as shown in the figure.



Take a small paper and cut it into the shape of ∠1, then keep that piece at ∠5.

What do you observe? You observe that paper coincides with ∠5 as shown in the figure.

Take another small paper and cut it in the shape of ∠2.

Now keep that piece at ∠6. What do you observe?

You observe that it coincides with ∠6. Similarly, by continuing this activity you observe that ∠4 coincides with ∠8 and ∠3 coincides with ∠7.

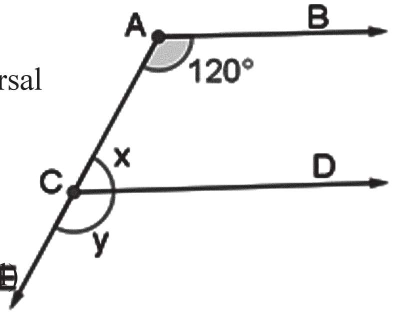
From the above activity, we conclude that, ***'when a transversal intersects a pair of parallel lines then the corresponding angles are equal.'***

Here, in the above figure if $\angle 1 = 102^0$, then $\angle 5 = 102^0$,

if $\angle 8 = 78^0$, then $\angle 4 = 78^0$

Example 6: In the given figure $\overrightarrow{AB} \| \overrightarrow{CD}$ and $\overrightarrow{AE}$ is transversal.

If $\angle BAC = 120^0$, then find x and y?



Solution: In the given figure, $\overrightarrow{AB} \| \overrightarrow{CD}$ and $\overrightarrow{AE}$ is transversal

$\angle BAC = 120^0$

$\angle ACD = x$

$\angle DCE = y$

$\angle BAC = \angle DCE$ (correpsonding angles are equal)

$\therefore y = 120^0$

$x + y = 180^0$ (Linear pair of angles are supplementary)

$x + 120^0 = 180^0$

$x = 180^0 - 120^0$

$\therefore x = 60^0$

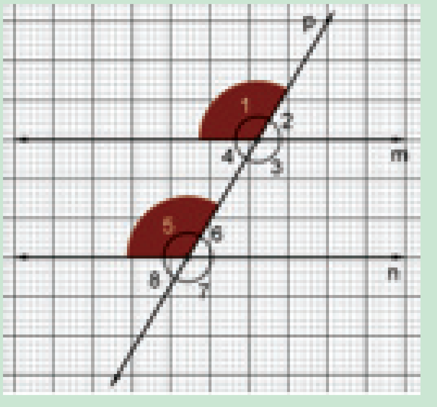
Hence $x = 60^0$, $y = 120^0$.

ఒక జత సమాంతరరేఖలను తిర్యగ్రేఖ ఖండించినప్పుడు ఏర్పడే కోణాల జతల లక్షణాలను గూర్చి మనం ఇప్పుడు తెలుసుకుందాం.

1. సదృశకోణాల ధర్మం :

ఇప్పుడు మనం సదృశకోణాల యొక్క ధర్మం గూర్చి క్రింది కృత్యం ద్వారా తెలుసుకుందాం.

ఒక గ్రాఫ్ కాగితం తీసుకోండి. దానిపై ఒక జత సమాంతర రేఖలు m మరియు n గీయండి. సమాంతర రేఖలు 'm' మరియు 'n' లను రెండు విభిన్న బిందువుల వద్ద ఖండించే విధంగా ఒక తిర్యగ్రేఖ p ని పటంలో చూపినట్లు గీయండి. అప్పుడు ప్రక్క పటంలో చూపిన విధంగా ఏర్పడిన కోణాలను $\angle 1, \angle 2, \angle 3, \angle 4, \angle 5, \angle 6, \angle 7$ మరియు $\angle 8$ అని అనుకొనుము..



ఒక చిన్న కాగితాన్ని తీసుకొని దానిని $\angle 1$ ఆకారంలోకి కత్తిరించండి. కత్తిరించిన ఆ ముక్కను $\angle 5$ వద్ద ఉంచండి.

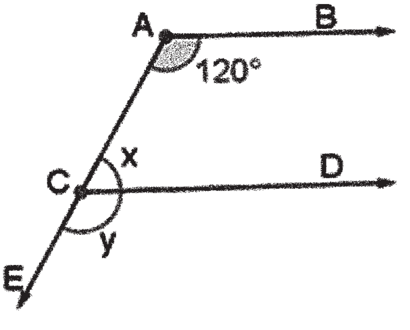
నీవు ఏమి గమనించావు? పటంలో చూని విధంగా కాగితం ముక్క $\angle 5$తో ఏకీభవిస్తుందని మీరు గమనిస్తారు. మరో చిన్న కాగితాన్ని తీసుకుని దానిని $\angle 2$ ఆకారంలో కత్తిరించండి. కత్తిరించిన ఆ ముక్కను $\angle 6$ వద్ద ఉంచండి. నీవు ఏమి గమనించావు? కాగితం ముక్క $\angle 6$ తో ఏకీభవిస్తుందని మీరు గమనిస్తారు. ఇదేవిధంగా కృత్యం కొనసాగించడం ద్వారా కోణాలు $\angle 4, \angle 8$ లు ఏకీభవిస్తాయని మరియు కోణాలు $\angle 3, \angle 7$ లు ఏకీభవిస్తాయని గమనించండి.

పై కృత్యం నుండి, **'ఒక జత సమాంతర రేఖల ను తిర్యగ్రేఖ ఖండించినప్పుడు ఏర్పడిన సదృశ కోణాలు సమానం'** అని తెలుస్తుంది.

ఇక్కడ పైపటంలో $\angle 1 = 102^0$ అయితే $\angle 5 = 102^0$ అవుతుంది.

ఒకవేళ $\angle 8 = 78^0$ అయితే $\angle 4 = 78^0$ అవుతుంది.

ఉదాహరణ 6: ఇచ్చిన పటంలో $\overrightarrow{AB} \| \overrightarrow{CD}$ మరియు $\overrightarrow{AE}$ ఒక తిర్యగ్రేఖ.
$\angle BAC = 120^0$ అయితే x మరియు yలను కనుగొనండి?



సాధన: ఇచ్చిన పటంలో $\overrightarrow{AB} \| \overrightarrow{CD}$ మరియు $\overrightarrow{AE}$ ఒక తిర్యగ్రేఖ

$\angle BAC = 120^0$

$\angle ACD = x$

$\angle DCE = y$

$\angle BAC = \angle DCE$ (సదృశకోణాలు సమానం)

$\therefore y = 120^0$

$x + y = 180^0$ (రేఖీయ ద్వయం ఎప్పుడు సంపూరకాలు)

$x + 120^0 = 180^0$

$x = 180^0 - 120^0$

$\therefore x = 60^0$

కనుక $x = 60^0, y = 120^0$.

Check Your Progress

In the figure, $p \parallel q$ and t is a transversal.

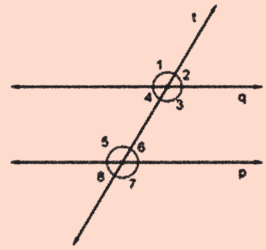
Observe the angles formed.

i) If $\angle 1 = 100^0$, then what is $\angle 5$?

ii) If $\angle 8 = 80^0$, then what is $\angle 4$?

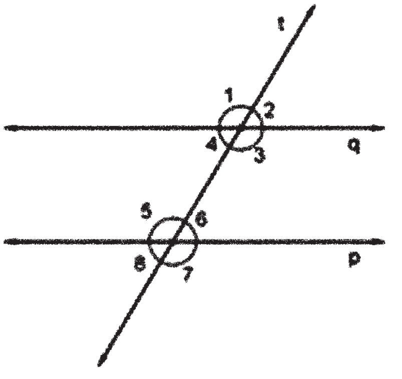
iii) If $\angle 3 = 145^0$, then what is $\angle 7$?

iv) If $\angle 6 = 30^0$, then what is $\angle 2$?



2) *Property of alternate interior angles:*

Let us find the relation between alternate interior angles formed when a transversal intersect a pair of parallel lines.



Let $p \parallel q$ and r is a transversal.

From figure $\angle 1 = \angle 3$ (why?)

$\angle 1 = \angle 5$ (why?)

Hence $\angle 3 = \angle 5$

Similarly $\angle 4 = \angle 6$

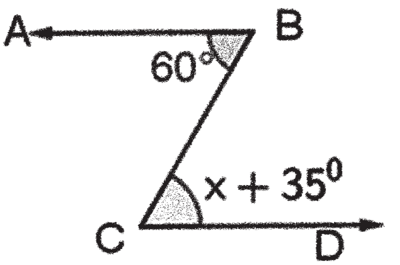
Hence, we conclude that, ***'when a transversal intersect a pair of parallel lines, then the alternate interior angles are equal.'***

In the above figure if $\angle 3 = 110^0$ then $\angle 5 = 110^0$.

If $\angle 4 = 70^0$ then $\angle 6 = 70^0$.

Example 7: In the given figure, $\overrightarrow{BA} \parallel \overrightarrow{CD}$ and $\overline{BC}$ is transversal. Find x.

Solution: In the given figure, $\overrightarrow{BA} \parallel \overrightarrow{CD}$ and $\overline{BC}$ is transversal



$\angle C = x + 35^0$ and $\angle B = 60^0$

$\angle C = \angle B$ ($\because$ alternate interior angles are equal)

$x + 35^0 = 60^0$

$x = 60^0 - 35^0$

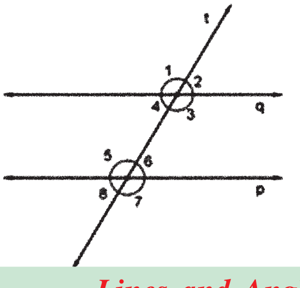
$\therefore x = 25^0$

Let's think

What is the relation between alternate exterior angles formed by a transversal on parallel lines?

3) **Property of Co- interior angles:**

Let us find the relation between co interior angles formed when a transversal intersect a pair of parallel lines.



Let $n \parallel m$ and l is a transversal. From the figure,

$\angle 2 + \angle 3 = 180^0$ (why?)

$\angle 2 = \angle 6$ (why?)

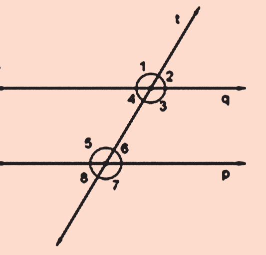
Hence, $\angle 3 + \angle 6 = 180^0$

similarly, $\angle 4 + \angle 5 = 180^0$

నీ ప్రగతిని తెలుసుకో

పటంలో $p \parallel q$ మరియు t ఒక తిర్యగ్రేఖ.

పటంలో కోణాలను పరిశీలించి క్రింది వానికి జవాబులు రాయండి.



i) If $\angle 1 = 100^0$ అయిన $\angle 5$ విలువ ఎంత?

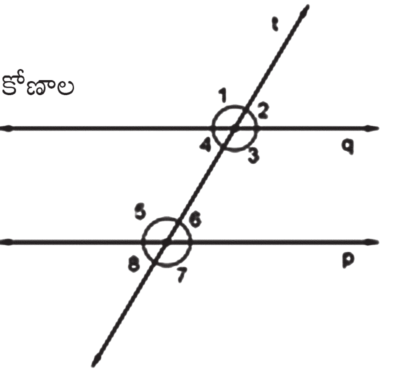
ii) If $\angle 8 = 80^0$ అయిన $\angle 4$ విలువ ఎంత?

iii) If $\angle 3 = 145^0$ అయిన $\angle 7$ విలువ ఎంత?

iv) If $\angle 6 = 30^0$ అయిన $\angle 2$ విలువ ఎంత?

2) ఏకాంతరకోణాల ధర్మం:

ఒక జత సమాంతర రేఖలను తిర్యగ్రేఖ ఖండించినప్పుడు ఏర్పడే ఏకాంతరకోణాల మధ్య గల సంభందం గూర్చి మనం ఇప్పుడు తెలుసుకుందాం.



$p \parallel q$ మరియు r ఒక తిర్యగ్రేఖ అనుకొందాం.

పటం నుండి, $\angle 1 = \angle 3$ (ఎందుకు?)

$\angle 1 = \angle 5$ (ఎందుకు?)

కనుక, $\angle 3 = \angle 5$

ఇదే విధంగా $\angle 4 = \angle 6$

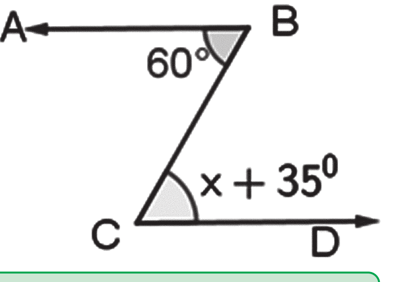
కనుక, **"ఒక జత సమాంతర రేఖలను తిర్యగ్రేఖ ఖండించినప్పుడు ఏర్పడే ఏకాంతర కోణాలు సమానం"** అని మనం నిర్ధారించవచ్చును.

పై పటంలో $\angle 3 = 110^0$ అయినచో $\angle 5 = 110^0$ అవుతుంది.

ఒకవేళ $\angle 4 = 70^0$ అయినచో $\angle 6 = 70^0$. అవుతుంది.

ఉదాహరణ 7 : ఇచ్చిన పటంలో, $\overrightarrow{BA} \parallel \overrightarrow{CD}$ మరియు $\overline{BC}$ ఒక తిర్యగ్రేఖ అయిన xను కనుగొనండి?

సాధన: ఇచ్చిన పటంలో, $\overrightarrow{BA} \parallel \overrightarrow{CD}$ మరియు $\overline{BC}$ ఒక తిర్యగ్రేఖ



$\angle C = x + 35^0$ మరియు $\angle B = 60^0$

$\angle C = \angle B$ ($\because$ ఏకాంతర కోణాలు సమానం)

$x + 35^0 = 60^0$

$x = 60^0 - 35^0$

$\therefore x = 25^0$

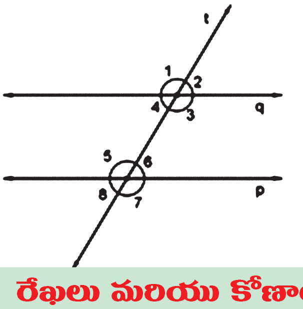
ఆలోచిద్దాం!

ఒక జత సమాంతర రేఖలను తిర్యగ్రేఖ ఖండించినప్పుడు ఏర్పడే ఏక బాహ్యకోణాల మధ్య గల సంబంధం ఏమిటి?

3) తిర్యగ్రేఖ ఒకే వైపున గల అంతరకోణాల ధర్మం:

ఒక జత సమాంతర రేఖల ను తిర్యగ్రేఖ ఖండించినప్పుడు ఏర్పడిన, తిర్యగ్రేఖకు ఒకే వైపున గల అంతరకోణాల మధ్య గల సంబధం గూర్చి మనం ఇప్పుడు తెలుసుకుందాం.

రెండు సరళరేఖలు $n \parallel m$ మరియు l ఒక తిర్యగ్రేఖ .



పటం నుండి,

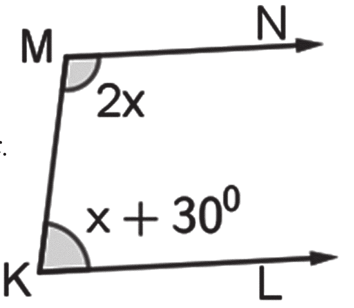
$\angle 2 + \angle 3 = 180^0$ (ఎందుకు?)

$\angle 2 = \angle 6$ (ఎందుకు?)

కనుక $\angle 3 + \angle 6 = 180^0$

ఇదేవిధంగా, $\angle 4 + \angle 5 = 180^0$

Hence, we conclude that, ***'when a transversal intersect a pair of parallel lines, then the interior angles on the same side of transversal are supplementary.'***



In the above figure, if $\angle 3 = 105^0$ then $\angle 6 = 75^0$

if $\angle 4 = 75^0$ then $\angle 5 = 105^0$

Example 8: In the figure $\overrightarrow{MN} \parallel \overrightarrow{KL}$ and $\overline{MK}$ is transversal. Find x.

Solution : From the figure, $\overrightarrow{MN} \parallel \overrightarrow{KL}$ and $\overline{MK}$ is transversal

$\angle M = 2x$ and $\angle K = x + 30^0$

$\angle M + \angle K = 180^0$ ($\because$ co-interior angles are supplementary)

$2x + x + 30^0 = 180^0$

$3x + 30^0 = 180^0$

$3x = 180^0 - 30^0$

$3x = 150^0$

$x = \frac{150^\circ}{3}$

$\therefore\ x = 50^0$

Example 9 : In the figure $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$ and C is a point in between them. Observe the figure, then find x, y and $\angle BCD$.

Solution : In the figure $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$ and C is a point in between them.

Draw a parallel line CF to $\overline{AB}$ through C.

$\overline{AB} \parallel \overline{CF}$, and $\overline{BC}$ is a transversal.

$x + 103^0 = 180^0$ (why?)

$x = 180^0 - 103^0$

$x = 77^0$

From the figure,

$\overline{DE} \parallel \overline{CF}$ and $\overline{CD}$ is a transversal.

$y + 103^0 = 180^0$ (why?)

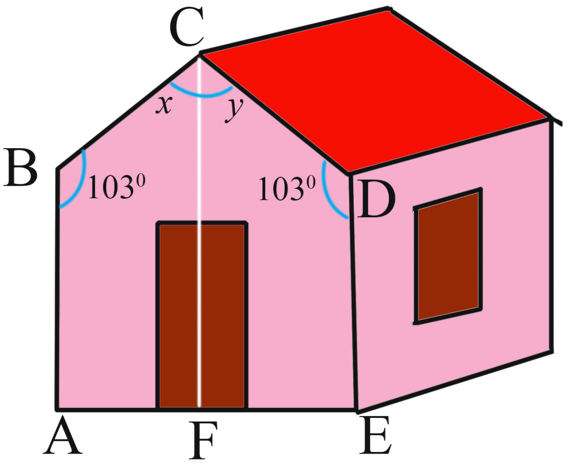
$y = 180^0 - 103^0$

$y = 77^0$

and $\angle BCD = x + y$

$= 77^0 + 77^0$

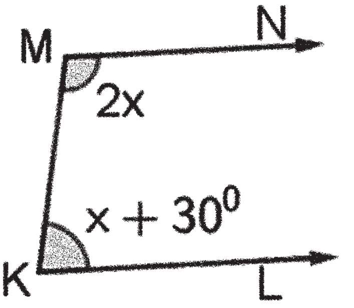
$= 154^0$



కనుక, **"ఒక జత సమాంతర రేఖలను తిర్యగ్రేఖ ఖండించినప్పుడు ఏర్పడిన, తిర్యగ్రేఖకు ఒకే వైపున గల అంతరకోణాలు సంపూరకాలు"** అని మనం నిర్ధారించవచ్చును.

పటంలో $\angle 3 = 105^0$ అయిన $\angle 6 = 75^0$ అవుతుంది.

$\angle 4 = 75^0$ అయిన $\angle 5 = 105^0$ అవుతుంది.



ఉదాహరణ 8 : పటంలో $\overrightarrow{MN} \parallel \overrightarrow{KL}$ మరియు $\overline{MK}$ ఒక తిర్యగ్రేఖ అయిన x ను కనుక్కోండి?

సాధన : పటంలో $\overrightarrow{MN} \parallel \overrightarrow{KL}$ మరియు $\overline{MK}$ ఒక తిర్యగ్రేఖ

పటం నుండి, $\angle M = 2x$ మరియు $\angle K = x + 30^0$

$\angle M + \angle K = 180^0$ (తిర్యగ్రేఖకు ఒకే వైపున గల అంతరకోణాల జత సంపూరకాలు)

$2x + x + 30^0 = 180^0$

$3x + 30^0 = 180^0$

$3x = 180^0 - 30^0$

$3x = 150^0$

$x = \dfrac{150^\circ}{3}$

$\therefore\ x = 50^0$

ఉదాహరణ 9 : ఇచ్చిన చిత్రంలో $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$ మరియు వాటి మధ్యలో ఒక బిందువు C. పటాన్ని పరిశీలించి x, y మరియు $\angle BCD$ విలువలను కనుగొనండి?

సాధన : పటం నుండి $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$ మరియు వాటి మధ్యలో ఒక బిందువు C.

$\overline{AB}$ కి సమాంతర రేఖ $\overline{CF}$ ను C నుండి గీయండి.

$\overline{AB} \parallel \overline{CF}$ మరియు $\overline{BC}$ ఒక తిర్యగ్రేఖ

$x + 103^0 = 180^0$ (ఎందుకు?)

$x = 180^0 - 103^0$

$x = 77^0$

పటం నుండి,

$\overline{DE} \parallel \overline{CF}$ మరియు $\overline{CD}$ ఒక తిర్యగ్రేఖ

$y + 103^0 = 180^0$ (ఎందుకు?)

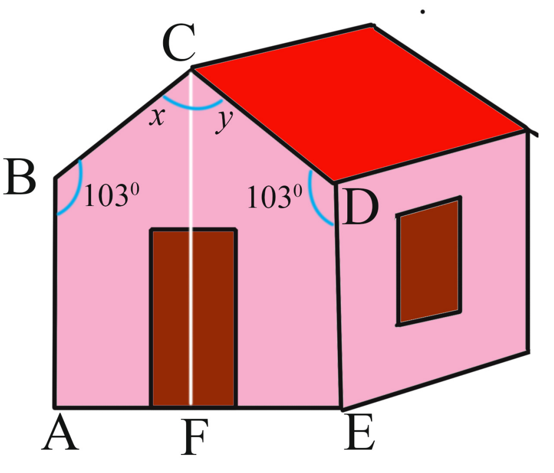
$y = 180^0 - 103^0$

$y = 77^0$

మరియు $\angle BCD = x + y$

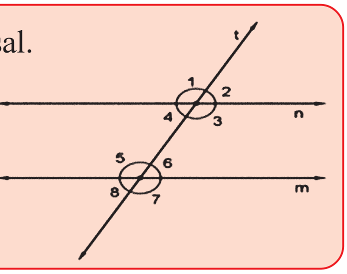
$= 77^0 + 77^0$

$= 154^0$



Check Your Progress

1. In the figure, $m \parallel n$ and t is a transversal.
   i) If $\angle 3 = 116^0$ then what is $\angle 5$?
   ii) If $\angle 4 = 51^0$ then what is $\angle 5$?
   iii) If $\angle 1 = 123^0$ then what is $\angle 7$?
   iv) If $\angle 2 = 66^0$ then what is $\angle 7$?



Let's think

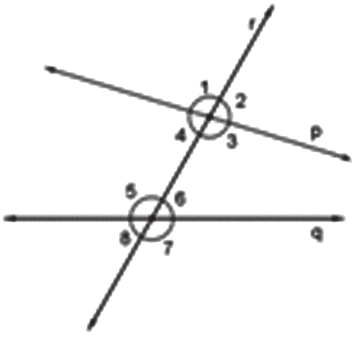
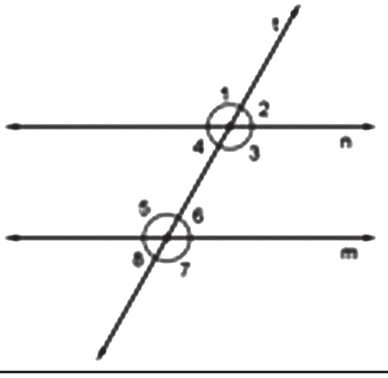
What is the relation between co-exterior angles, when a transversal cuts a pair of parallel lines?

Now, let us find whether the two straight lines are parallel or not in the following cases:

Case 1: When the corresponding angles are equal: Let us find whether the two straight lines are parallel or not through an activity.

Let's Do Activity

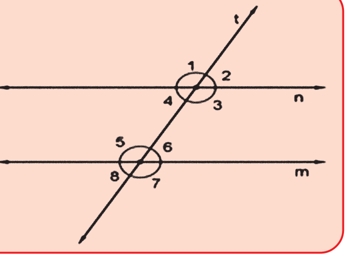
Take a white paper and draw a pair of non-parallel lines p and q and a transversal r shown in the figure 1. Measure the corresponding angles and fill the table. Now, take a graph sheet and draw a pair of parallel lines m, n and a transversal t as shown in the figure 2. Measure the pair of corresponding angles and fill the table.

S.No	Figure	Corresponding angles	Equal or not
1		$\angle 1 =$ $\angle 5 =$	
		$\angle 2 =$ $\angle 6 =$	
		$\angle 3 =$ $\angle 7 =$	
		$\angle 4 =$ $\angle 8 =$	
2		$\angle 1 =$ $\angle 5 =$	
		$\angle 2 =$ $\angle 6 =$	
		$\angle 3 =$ $\angle 7 =$	
		$\angle 4 =$ $\angle 8 =$	

What do you observe from the above table? If the pair of corresponding angles are not equal, then what do you say about the pair of lines? If the pair of corresponding angles are equal, then what do you say about the pair of lines? Which pair of lines are parallel? Hence, we conclude that ***'when a transversal intersects two lines and a pair of corresponding angles are equal then, the two lines are parallel.'***

నీ ప్రగతిని తెలుసుకో

1. పటంలో $m \parallel n$ మరియు t ఒక తిర్యగ్రేఖ.
   i) $\angle 3 = 116^0$ అయిన $\angle 5$ విలువ ఎంత అవుతుంది?
   ii) $\angle 4 = 51^0$ అయిన $\angle 5$ విలువ ఎంత అవుతుంది?
   iii) $\angle 1 = 123^0$ అయిన $\angle 7$ విలువ ఎంత అవుతుంది?
   iv) $\angle 2 = 66^0$ అయిన $\angle 7$ విలువ ఎంత అవుతుంది?



ఆలోచిద్దాం!

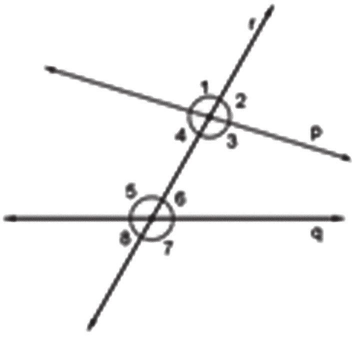
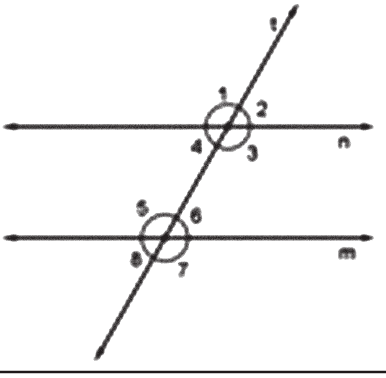
ఒక జత సమాంతరరేఖలను తిర్యగ్రేఖ ఖండించినప్పుడు ఏర్పడే సహబాహ్యకోణాల మధ్య గల సంబంధం ఏమిటి?

ఇప్పుడు మనం క్రింది సందర్భాలలో రెండు సరళరేఖలు సమాంతరంగా వుంటాయా లేదా అనే విషయాన్ని తెలుసుకుందాం:

సందర్భం1. సదృశకోణాలు సమానం అయినప్పుడు. రెండు సరళరేఖలు సమాంతరంగా ఉంటాయా లేదా అనే విషయాన్ని మనం ఒక కృత్యం చేసి తెలుసుకుందాం

ఇది చేద్దాం! కృత్యం

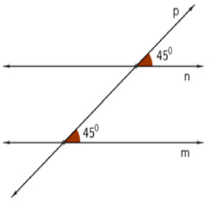
ఒక తెల్ల కాగితాన్ని తీసుకొనుము. పటం 1 లో చూపిన విధంగా దానిపై సమాంతరంగా లేని రెండు సరళరేఖలు p మరియు q లను గీయండి. వాటిని ఖండించేటట్లు ఒక తిర్యగ్రేఖ r ను గీయండి. అప్పుడు ఏర్పడిన సదృశకోణాలు కొలిచి పట్టికను పూరించండి. ఇప్పుడు ఒక గ్రాఫు కాగితం తీసుకొని దానిపై పటం 2 లో చూపిన విధంగా ఒక జత సమాంతరరేఖలు m, n మరియు వాటిపై ఒక తిర్యగ్రేఖ t ని గీయండి. ఈ సందర్భంలో ఏర్పడిన సదృశ కోణాలు కొలిచి పట్టికలో వ్రాయండి.

క్ర.సం.	పటం	సదృశకోణాలు	సమానమా?కాదా?
1		$\angle 1 =$ $\angle 5 =$	
		$\angle 2 =$ $\angle 6 =$	
		$\angle 3 =$ $\angle 7 =$	
		$\angle 4 =$ $\angle 8 =$	
2		$\angle 1 =$ $\angle 5 =$	
		$\angle 2 =$ $\angle 6 =$	
		$\angle 3 =$ $\angle 7 =$	
		$\angle 4 =$ $\angle 8 =$	

పై పట్టిక నుండి మీరు ఏమి గమనించారు? సదృశకోణాలు సమానంగా లేనప్పుడు, సరళరేఖల జత గురించి మీరు ఏమి చెప్పగలరు? సదృశకోణాలు సమానంగా ఉన్నప్పుడు, సరళరేఖల జత గురించి మీరు ఏమి చెప్పగలరు? ఏ సరళరేఖల జత సమాంతరంగా కలవు? ***"ఒక జత సరళరేఖలను తిర్యగ్రేఖ ఖండించినపుడు ఏర్పడిన సదృశకోణాలజత సమానం అయితే ఆ రెండు సరళరేఖలు సమాంతరంగా ఉంటాయి."*** అని చెప్పవచ్చు.

Example 10: In the figure transversal *p* intersects two lines *m* and *n*.

Observe the figure, check whether *m* || *n* or not.

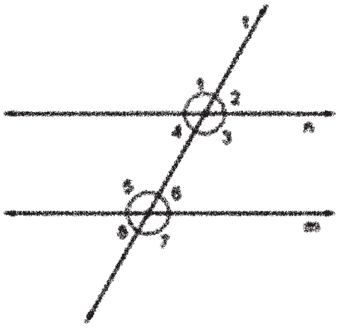


Solution: In the given figure, it is given that each angle in the pair of corresponding angles is 45^0. So they are equal.

Since a pair of corresponding angles are equal the lines are parallel.

Hence, *m* || *n*.

Case 2. When the alternate interior angles are equal.



Let *m* and *n* are two straight lines and *r* is a transversal.

alternate interior angles are equal

Let $\angle 3 = \angle 5$

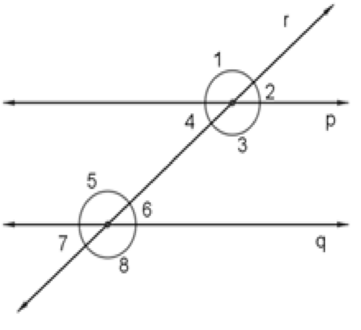
But $\angle 3 = \angle 1$ (why?)

$\therefore \angle 1 = \angle 5$

Since corresponding angles are equal, the lines are parallel.

Hence, *m* || *n*.

Case 3. When the co interior angles are supplementary.



Let *p, q* are two straight lines and *r* is a transvers

co-interior angles are supplementary.

Let $\angle 4 + \angle 5 = 180^0$

But $\angle 1 + \angle 4 = 180^0$ (why?)

$\angle 4 + \angle 5 = \angle 1 + \angle 4$

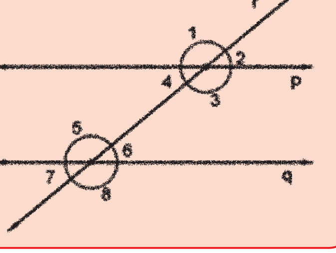
$\therefore \angle 1 = \angle 5$

Since corresponding angles are equal, the lines are parallel.

Hence, *p* || *q*.

Check Your Progress

From the figure, state which property that is used in each of the following.



i) If $\angle 3 = \angle 5$ then *p* || *q*.

ii) If $\angle 3 + \angle 6 = 180^0$ then *p* || *q*.

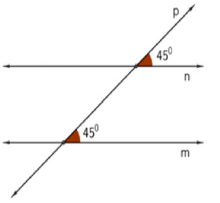
iii) If $\angle 3 = \angle 8$ then *p* || *q*.

iv) If *p* || *q* then $\angle 1 = \angle 8$.

Let's Explore

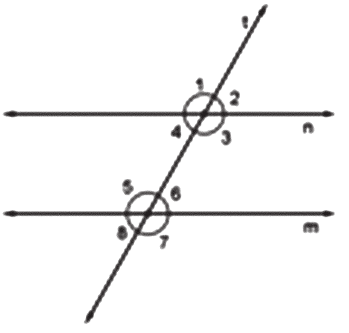
1. When a transversal intersects two lines and a pair of alternate exterior angles are equal, What can you say about the two lines?
2. When a transversal intersects two lines and a pair of co exterior angles are supplementary, what can you say about the two lines?

ఉదాహరణ 10: ఇచ్చిన పటంలో m, n లు రెండు సరళరేఖలు. p ఒక తిర్యగ్రేఖ. పటాన్ని పరిశీలించి $m \parallel n$ అవుతుందో లేదో కనుక్కోండి?



సాధన: ఇచ్చిన పటంలో ఒక జత సదృశ కోణాలు ఒక్కొక్కటి 45^0 గా ఇవ్వబడింది. ఇవి సమానాలు. ఒక జత సరళరేఖలను తిర్యగ్రేఖ ఖండించినపుడు ఏర్పడిన సదృశ కోణాల జత సమానం అయినచో ఆ రెండు సరళరేఖలు సమాంతరంగా ఉంటాయి. కనుక, $m \parallel n$ అవుతుంది.

సందర్భం 2. **ఏకాంతర కోణాలు సమానం అయినప్పుడు.**



m, n లు రెండు సరళరేఖలు మరియు r ఒక తిర్యగ్రేఖ.

ఒక జత ఏకాంతర కోణాలు సమానం

$\angle 3 = \angle 5$ అనుకొనుము.

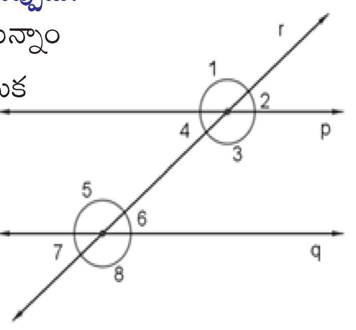
కానీ, $\angle 3 = \angle 1$ (ఎందుకు?)

$\therefore \angle 1 = \angle 5$

సదృశ కోణాల జత సమానం అయినచో ఆ రెండు సరళరేఖలు సమాంతరంగా ఉంటాయి.

కనుక, $p \parallel q$.

సందర్భం 3. **తిర్యగ్రేఖ ఒకే వైపున గల అంతర కోణాలు సంపూరకాలు అయినప్పుడు.**



p, q లు రెండు సరళరేఖలు మరియు r ఒక తిర్యగ్రేఖగా తీసుకున్నాం

తిర్యగ్రేఖకు ఒకే వైపున గల అంతర కోణాలు సంపూరకాలు కనుక

$\angle 4 + \angle 5 = 180^0$ అనుకొనుము.

కానీ $\angle 1 + \angle 4 = 180^0$ (ఎందుకు?)

$\angle 4 + \angle 5 = \angle 1 + \angle 4$

$\therefore \angle 1 = \angle 5$

సదృశ కోణాల జత సమానం కనుక ఆ రెండు సరళరేఖలు సమాంతరంగా ఉంటాయి.
కనుక, $p \parallel q$.

నీ ప్రగతిని తెలుసుకో

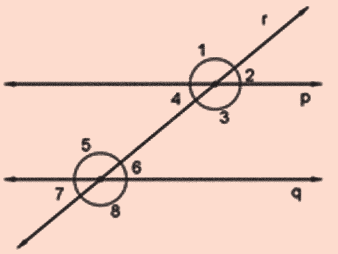
పటాన్ని పరిశీలించి క్రింద ఇచ్చిన ప్రతిదానిలో ఉపయోగించిన న్యాయాన్ని వ్రాయండి.

i) $\angle 3 = \angle 5$ అయిన $p \parallel q$.

ii) $\angle 3 + \angle 6 = 180^0$ అయిన $p \parallel q$.

iii) $\angle 3 = \angle 8$ అయిన $p \parallel q$.

iv) $p \parallel q$ అయిన $\angle 1 = \angle 8$.

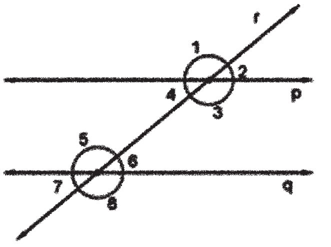


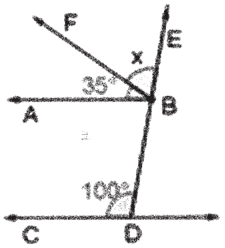
అన్వేషిద్దాం

1. ఒక జత సరళరేఖలను తిర్యగ్రేఖ ఖండించినపుడు ఏర్పడిన ఏక బాహ్యకోణాల జత సమానం అయిన ఆ రెండు సరళరేఖలు గూర్చి నీవేమి చెప్పగలవు?
2. ఒక జత సరళరేఖలను తిర్యగ్రేఖ ఖండించినపుడు ఏర్పడిన సహ బాహ్యకోణాల జత సంపూరకాలు అయినచో ఆ రెండు సరళరేఖలు గూర్చి నీవేమి చెప్పగలవు?

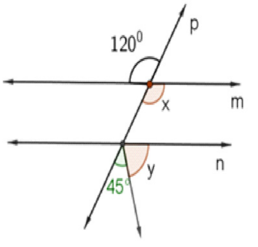
Exercise - 4.4

1. In the given figure, two lines $p \parallel q$ and r is transversal. If $\angle 3 = 135^0$, then find the remaining angles.



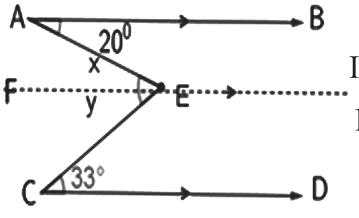
2. 

In the given figure, $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ and $\overrightarrow{DE}$ is a transversal. Find x.



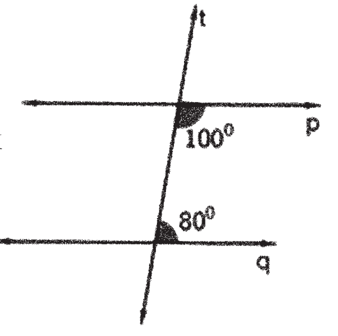
3. In the given figure, $m \parallel n$ and p is transversal.

Find x and y.

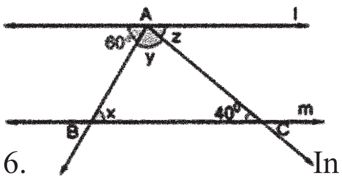
4. 

In the given figure, $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD} \parallel \overrightarrow{FE}$.

Find x, y and $\angle AEC$.

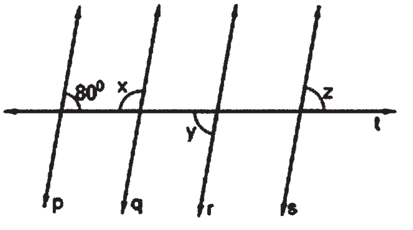


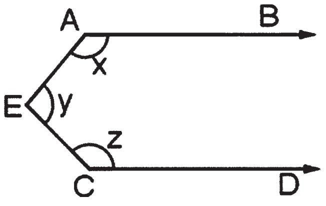
5. In the given figure, a transversal t intersects two lines p and q. Check whether $p \parallel q$ or not.



6. In the given figure if $l \parallel m$, then find x, y and z.

7. In the given figure p, q, r and s are parallel lines and t is a transversal. Find x, y and z.



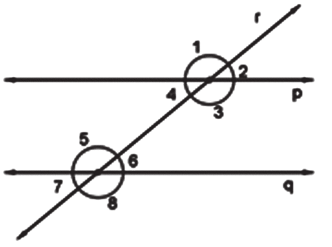
8. 

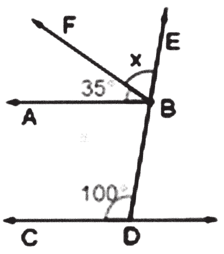
In the given figure $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$ and E is a point in between them. Find $x + y + z$.

(Hint : Draw a parallel line to $\overrightarrow{AB}$ through E)

అభ్యాసం - 4.4

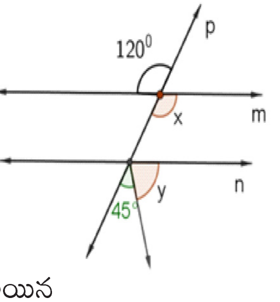
1. ఇచ్చిన పటంలో $p || q$ మరియు r ఒక తిర్యగ్రేఖ $\angle 3 = 135^0$ అయినచో మిగిలిన అన్ని కోణాలను కనుగొనండి?

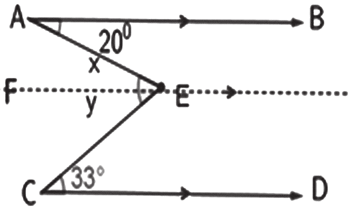




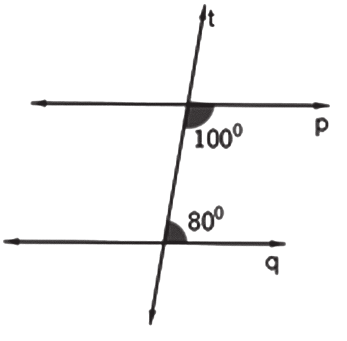
2. ఇచ్చిన పటంలో, $\overleftrightarrow{AB} || \overleftrightarrow{CD}$ మరియు $\overleftrightarrow{DE}$ ఒక తిర్యగ్రేఖ అయిన x విలువ కనుగొనండి.

3. ఇచ్చిన పటంలో, $m || n$ మరియు p ఒక తిర్యగ్రేఖ అయిన x మరియు y విలువలను కనుగొనండి.

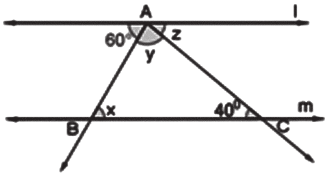




4. ఇచ్చిన పటంలో, $\overrightarrow{AB} || \overrightarrow{CD} || \overrightarrow{FE}$ అయిన x, y మరియు $\angle AEC$ విలువలను కనుగొనండి.

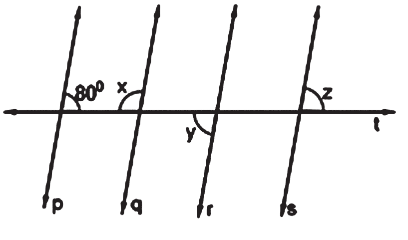


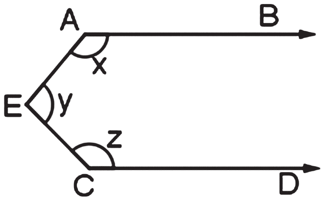
5. ఇచ్చిన పటంలో రెండు సరళరేఖలు p మరియు q లను ఒక తిర్యగ్రేఖ t ఖండించెను. $p || q$ అవుతుందో లేదో సరిచూడండి?



6. ఇచ్చిన పటంలో $l || m$ అయిన x, y మరియు z విలువలను కనుగొనండి?

7. ఇచ్చిన పటంలో p, q, r మరియు s లు సమాంతరరేఖలు మరియు t ఒక తిర్యగ్రేఖ అయిన x, y మరియు z విలువలను కనుగొనండి.

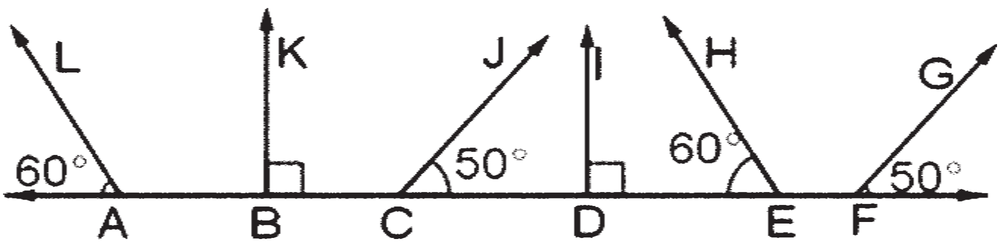




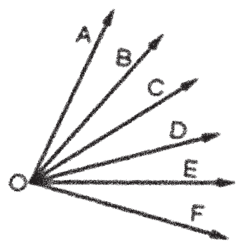
8. ఇచ్చిన పటంలో $\overrightarrow{AB} || \overrightarrow{CD}$ మరియు వాటి మధ్యలో ఒక బిందువు E అయిన $x + y + z$ విలువను కనుగొనండి.

(**సూచన** : E గుండా $\overrightarrow{AB}$ కి ఒక సమాంతరరేఖను గీయండి).

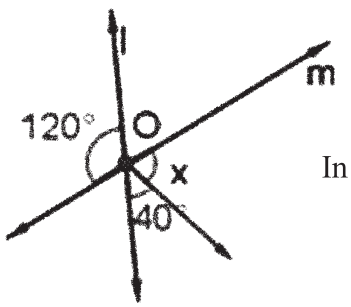
9. Identify the pair of parallel lines in the given figure and write them.



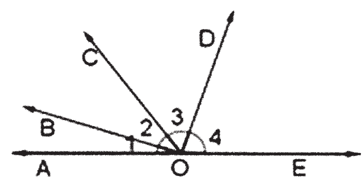
Unit Exercise



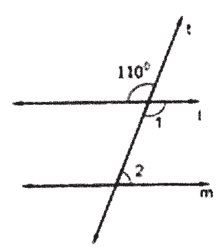
1. Find the complementary, supplementary and conjugate angle of 36^0.
2. Observe the figure and write any 4 pairs of adjacent angles.



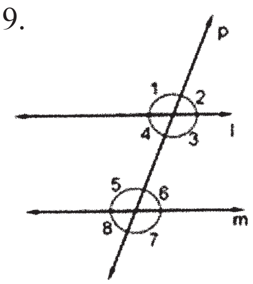
3. In the given figure the lines *l* and *m* intersect at O. Find *x*.



4. In the given figure $\overleftrightarrow{AE}$ is a straight line. If the ratio of angles $\angle 1$,$\angle 2$, $\angle 3$, $\angle 4$ in the given figure is 1:2:3:4, then find the angles.
5. Write any two examples for linear pair of angles in your surroundings.
6. Mani said, "Two obtuse angles can form a pair of conjugate angles." Do you agree. Justify your answer.
7. Draw a pair of adjacent angles which are not supplementary to each other.

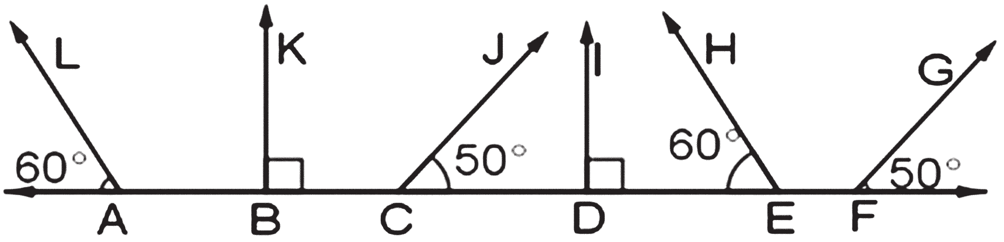


8. In the figure, if $l \parallel m$, t is a transversal. Find $\angle 1$ and $\angle 2$.



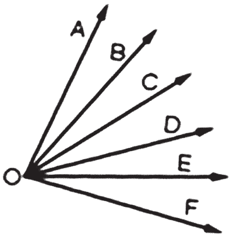
9. A line *p* intersects two lines *l* and *m* at two distinct points. Observe the figure and fill in the blanks:
   - i) The line '*p*' is known as ......, ...
   - ii) $\angle 1$ and $\angle 5$ is a pair of ....angles.
   - iii) $\angle 4$ and $\angle 6$ is a pair of ....angles.
   - iv) $\angle 3$ and $\angle 6$ is a pair of .... angles.

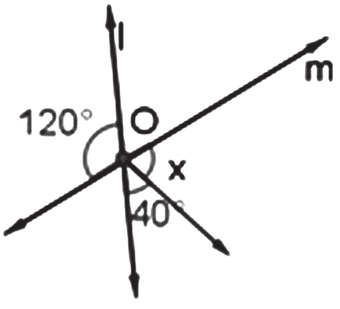
9. క్రింది ఇచ్చిన పటంలో సమాంతర రేఖల జతలను గుర్తించి వ్రాయండి.



యూనిట్ అభ్యాసం

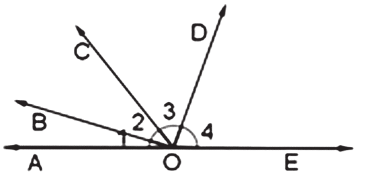
1. 36^0 యొక్క పూరక, సంపూరక మరియు సంయుగ్మ కోణా లను కనుగొనండి?
2. ప్రక్క పటాన్ని పరిశీలించండి. పటంలో ఏవైనా 4 జతల ఆసన్న కోణా లను రాయండి.



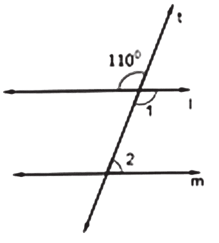


3. ఇచ్చిన పటంలో సరళరేఖలు l మరియు m లు O అనే బిందువు వద్ద ఖండించిన x విలువను కనుగొనండి.

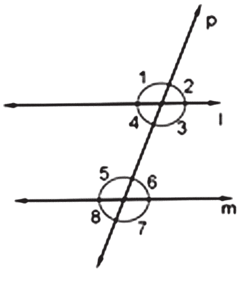
4. ఇచ్చిన పటంలో $\overleftrightarrow{AE}$ ఒక సరళరేఖ. కోణాలు $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$, $\angle 4$ ల నిష్పత్తి 1:2:3:4 అయిన ఆ కోణాలును కనుగొనండి.



5. రేఖీయ కోణాల జతకు మీ పరిసరాల నుండి రెండు ఉదాహరణలు రాయండి.
6. "రెండు అధిక కోణాలు ఒక జత సంయుగ్మ కోణాలను ఏర్పరుస్తాయి" అని మణి చెప్పెను. దీనిని మీరు అంగీకరిస్తారా? మీ సమాధానాన్ని సమర్ధించుము.
7. ఒకదానికొకటి సంపూరకాలు కాని ఒక జత ఆసన్న కోణాలకు పటాన్ని గీయండి.

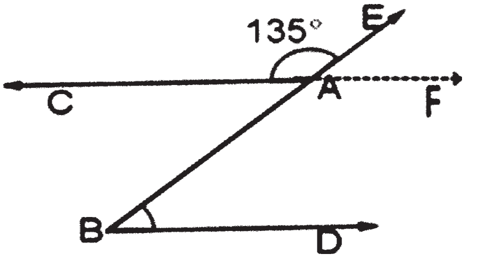


8. ఇచ్చిన పటంలో $l \parallel m$ మరియు t ఒక తిర్యగ్రేఖ. $\angle 1$ మరియు $\angle 2$ లను కనుగొనండి.



9. రెండు సరళరేఖలు l మరియు m లను మరో సరళరేఖ p రెండు విభిన్న బిందువుల వద్ద ఖండించినది. పటాన్ని పరిశీలించి ఖాళీలను పూరించండి.
   i) సరళరేఖ p ని ....అని అంటారు.
   ii) $\angle 1$ మరియు $\angle 5$ లు ....కోణాల జత.
   iii) $\angle 4$ మరియు $\angle 6$ లు ....కోణాల జత.
   iv) $\angle 3$ మరియు $\angle 6$ లు ....కోణాల జత.

10. In the given figure $\overleftrightarrow{CF} \parallel \overrightarrow{BD}$, $\overleftrightarrow{BE}$ is transversal. $\angle CAE = 135^0$, then find $\angle ABD$.

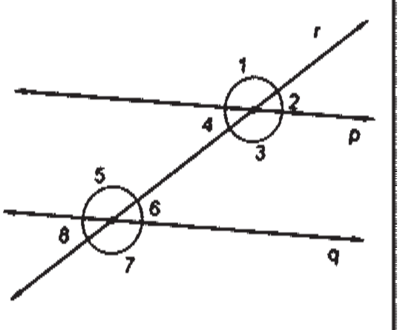


C3C4W7

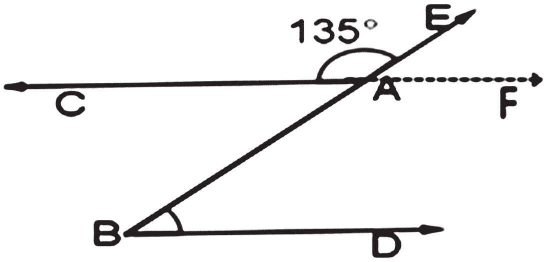
Points to Remember

1. If the sum of two angles is 90^0, then the angles are called as complementary angles to each other.
2. If the sum of two angles is 180^0, then the angles are called as supplementary angles to each other.
3. If the sum of the two angles is 360^0, then the angles are called as conjugate angles to each other.
4. Two angles are said to be adjacent angles, if they have a common vertex, common arm and lie on either side of the common arm.
5. A pair of adjacent angles whose sum is 180^0 are called as linear pair of angles.
6. When two straight lines intersect, the opposite angles at the point of intersection are called as vertically opposite angles.
7. Vertically opposite angles are equal.
8. A transversal is a straight line that intersects two or more straight lines at distinct points.
9. When a transversal intersects a pair of parallel lines *p* and *q*,
   let the angles formed be $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$, $\angle 4$, $\angle 5$, $\angle 6$, $\angle 7$ and $\angle 8$.

Interior angles	$\angle 3, \angle 4, \angle 5, \angle 6$
Exterior angles	$\angle 1, \angle 2, \angle 7, \angle 8$
Corresponding angles are equal	$\angle 1 = \angle 5$, $\angle 2 = \angle 6$, $\angle 3 = \angle 7$, $\angle 4 = \angle 8$
Alternate interior angles are equal	$\angle 3 = \angle 5$, $\angle 4 = \angle 6$
Alternate exterior angles are equal	$\angle 1 = \angle 7$, $\angle 2 = \angle 8$
Interior angles on same side of transversal are supplementary	$\angle 3 + \angle 6 = 180^0$ $\angle 4 + \angle 5 = 180^0$
Exterior angles on same side of transversal are supplementary	$\angle 1 + \angle 8 = 180^0$ $\angle 2 + \angle 7 = 180^0$



10. ఇచ్చిన పటంలో $\overleftrightarrow{CF} \parallel \overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{BE}$ మరియు $\overrightarrow{BE}$ ఒక తిర్యగ్రేఖ $\angle CAE = 135^0$ అయిన $\angle ABD$ విలువ కనుగొనండి.

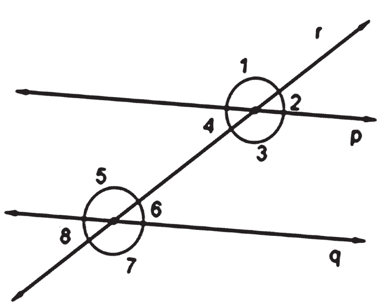


Z3Y7C4

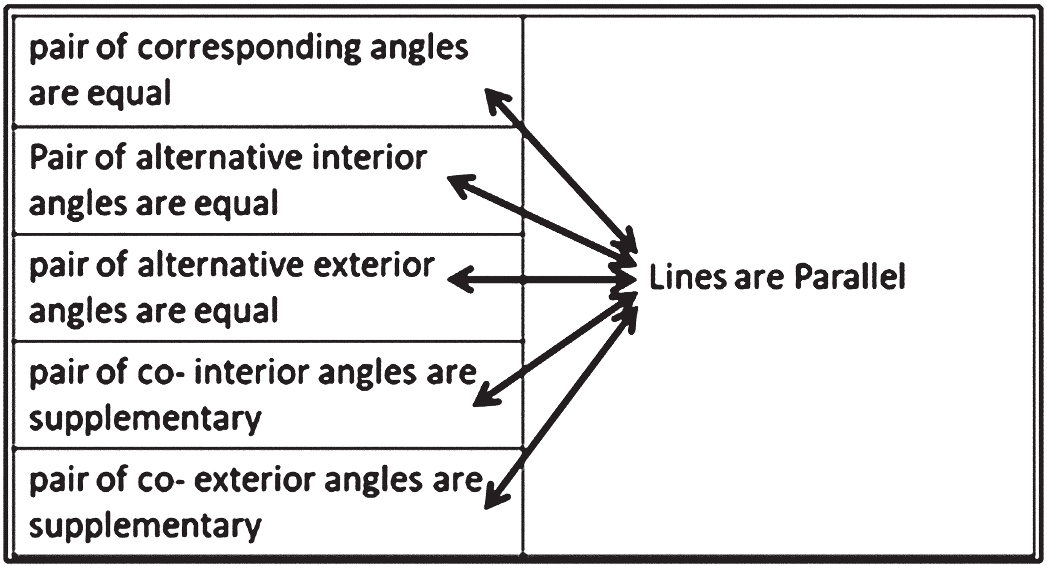
గుర్తుంచుకోవాల్సిన అంశాలు

1. రెండు కోణాల మొత్తం 90^0 అయితే, ఆ రెండు కోణాలను ఒకదానికొకటి పూరక కోణాలు అంటారు.
2. రెండు కోణాల మొత్తం 180^0 అయితే, ఆ రెండు కోణాలను ఒకదానికొకటి సంపూరక కోణాలు అంటారు.
3. రెండు కోణాల మొత్తం 360^0 అయితే, ఆ రెండు కోణాలను ఒకదానికొకటి సంయుగ్మ కోణాలు అంటారు.
4. రెండు కోణాలు ఉమ్మడి శీర్షం, ఉమ్మడి భుజం కలిగి ఆ రెండు కోణాలు ఉమ్మడి భుజం కి చెరోవైపున ఉన్నచో వాటిని ఆసన్నకోణాలు అంటారు.
5. రెండు ఆసన్న కోణాల మొత్తం 180^0 అయినచో వాటిని రేఖీయకోణాల జత లేదా రేఖీయ ద్వయం అని అంటారు.
6. రెండు సరళరేఖలు ఒకదానికొకటి ఖండించుకొన్నప్పుడు, ఆ ఖండన బిందువు వద్ద ఏర్పడిన అభిముఖకోణాల జతను శీర్షాభిముఖ కోణాలు అని అంటారు.
7. శీర్షాభిముఖ కోణాలు సమానం.
8. రెండు లేదా అంతకంటే ఎక్కువ సరళరేఖలను విభిన్న బిందువుల వద్ద ఖండించే సరళరేఖను తిర్యగ్రేఖ అంటారు.
9. ఒక జత సమాంతర రేఖలు p, q లను ఒక తిర్యగ్రేఖ r ఖండించినప్పుడు, ఏర్పడిన కోణాలు $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$, $\angle 4$, $\angle 5$, $\angle 6$, $\angle 7$ మరియు $\angle 8$ అని అనుకొనుము.

Interior angles	$\angle 3, \angle 4, \angle 5, \angle 6$
Exterior angles	$\angle 1, \angle 2, \angle 7, \angle 8$
Corresponding angles are equal	$\angle 1 = \angle 5$, $\angle 2 = \angle 6$, $\angle 3 = \angle 7$, $\angle 4 = \angle 8$
Alternate interior angles are equal	$\angle 3 = \angle 5$, $\angle 4 = \angle 6$
Alternate exterior angles are equal	$\angle 1 = \angle 7$, $\angle 2 = \angle 8$
Interior angles on same side of transversal are supplementary	$\angle 3 + \angle 6 = 180^0$ $\angle 4 + \angle 5 = 180^0$
Exterior angles on same side of transversal are supplementary	$\angle 1 + \angle 8 = 180^0$ $\angle 2 + \angle 7 = 180^0$



10. When a transversal intersects two lines,



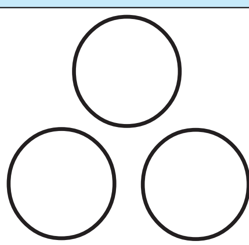
Historical Note

Euclid (323-283BC) was a Greek mathematician. He is well known as 'Father of Geometry.' He wrote a book named 'Elements' which was a collection of 13 volumes, dealing with geometry. 'Elements' was most influenced work in the history of mathematics. In his books he deduced many theorems using axioms. These theorems are being used in the study of Euclidean geometry.

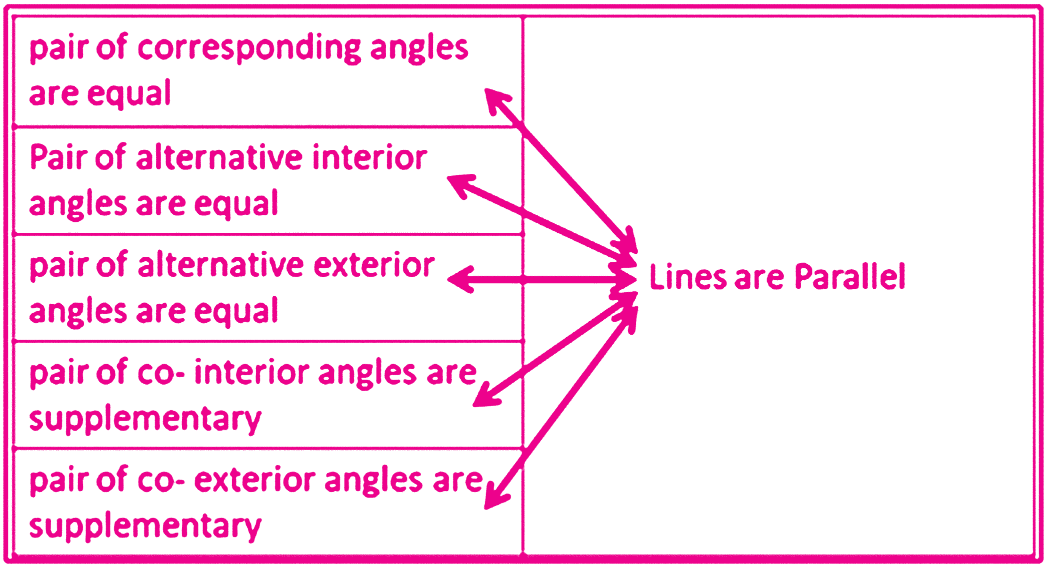
Logical Venn Diagrams

A Venn diagram is an illustration that uses circles to show the relationships among things or finite groups of things. Circles that overlap have a commonality while circles that do not overlap do not share those traits.

Venn diagrams help to visually represent the similarities and differences between three or more concepts.

S.No	Group	Venn diagram	Use of venn diagram	Example
1	a		Each class is totally different from the other.	1. Shark, Whale sea turtle 2. Iron, Copper and Brass 3. Apple, Mango, Orange 4. Book, Pen, Eraser 5. Fruits, Vegetables, Flowers.

10. ఒక తిర్యగ్రేఖ ఒక జత సరళరేఖలను ఖండించినపుడు,

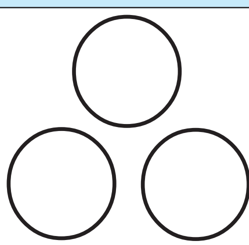


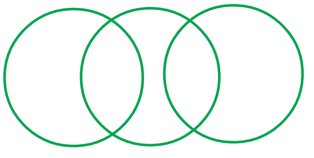
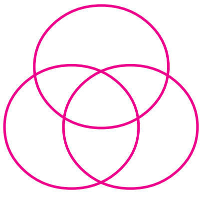
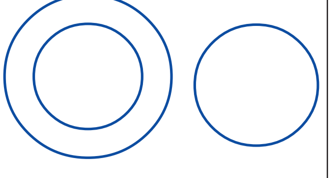
• చారిత్రక అంశము •

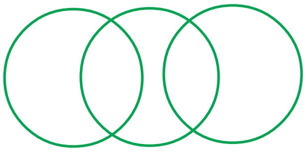
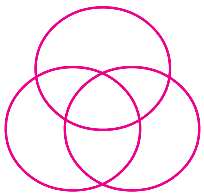
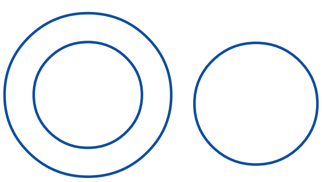
యూక్లిడ్ (323-283BC) ఒక గ్రీకు గణిత శాస్త్రవేత్త. ఆయన "రేఖాగణిత పితామహుడు"గా ప్రసిద్ధి చెందాడు. ఆయన "ఎలిమెంట్స్" అనే పేరుతో ఒక పుస్తకాన్ని రచించెను. ఇది రేఖాగణితాన్ని గురించి వివరించే 13 పుస్తకాల సమాహారం. గణిత శాస్త్ర చరిత్రలో "ఎలిమెంట్స్" అత్యంత ప్రభావితమైన రచన. ఆయన తన పుస్తకాల్లో అనేక స్వీకృతాలను ఉపయోగించి అనేక సిద్ధాంతాలను వివరించారు. ఈ సిద్ధాంతాలు యూక్లిడియన్ జ్యామితి అధ్యయనంలో ఇప్పటికీ ఉపయోగించబడుతున్నాయి.

తార్కిక వెన్ చిత్రాలు

వస్తువుల మధ్య సంబంధాలను లేదా వస్తువుల యొక్క చిన్న సమూహాల మధ్య సంబంధాలను చూపించడానికి ఉపయోగించే వృత్తాలే వెన్ చిత్రం. ఓవర్ ల్యాప్ అయ్యే వృత్తాల లక్షణాలు ఉమ్మడిగా ఉంటూ, ఓవర్ ల్యాప్ కాని వృత్తాలు వాటి లక్షణాలను పంచుకోవు. వెన్ చిత్రాలు మూడు లేదా అంతకంటే ఎక్కువ భావనల మధ్య ఉండే పోలికలు మరియు తేడాలను దృశ్యపరంగా ప్రాతినిధ్యం వహించడానికి సాయపడతాయి.

క్ర.సం.	సమూహం	తార్కిక వెన్ చిత్రము	వెన్ చిత్రము ఉపయోగము	ఉదాహరణ
1	a		ప్రతి తరగతి మిగిలిన తరగతులతో కలవ కుండా విభిన్నంగా ఉంటుంది.	1. సొరచేప, తిమింగలము, తాబేలు. 2. ఇనుము, రాగి మరియు ఇత్తడి 3. ఆపిల్, మామిడి, కమల 4. పుస్తకము, పెన్ను, రబ్బరు 5. పండ్లు, కూరగాయలు, పువ్వులు

S.No	Group	Venn diagram	Use of venn diagram	Example
2	b		Each class is totally inserted in another, but not mixed.	1. Musician, Instrumentalist, Violinist. 2. Carrot, Food, Vegetables 3. Andhra Pradesh, India, Asia. 4. Ring, Ornaments, Golden ring.
3	c		One class is partly related to other two but these two are no ware related.	1. Lawyer, Woman, Doctor 2. Dog, Cat, Pet
4	d		All the three are partly related to each other.	1. Athletes, Footballers & Cricketers. 2. Boys, Students, 7th Class Boys 3. Tennis fans, Cricket. fans, Kabaddi fans.
5	e		One class is completely inserted other and one is completely different from other two.	1. Sun, Moon, Stars. 2. Pen, Stationary, Soap. 3. Bird, Owl, Elephant.
6	f		Two are totally inserted in one but these two are no where related.	1. Lotus, Flower and Rose 2. Dog, Cat, Animal 3. Food, Milk, Fruits

క్ర.సం.	సమూహం	తార్కిక వెన్ చిత్రము	వెన్ చిత్రము ఉపయోగము	ఉదాహరణ
2	b		ప్రతి తరగతి కూడా పూర్తిగా మరో దానిలో చొప్పించ బడుతుంది కానీ కలవ బడలేదు.	1. సంగీత విద్వాంసులు, వాద్యకారులు, వయోలిన్ విద్వాంసుడు. 2. క్యారెట్, ఆహారం, కూరగాయలు 3. ఆంధ్రప్రదేశ్, భారతదేశం, ఆసియా 4. ఉంగరం, ఆభరణాలు, బంగారపు ఉంగరం.
3	c		ప్రతి తరగతి కూడా మరో దానికి పూర్తిగా భిన్నంగా ఉంటుంది.	1. లాయర్, ఆడవాళ్ళు, వైద్యులు 2. కుక్క, పిల్లి, పెంపుడు జంతువు
4	d		ఈ మూడూ ఒకదానితో మరొక దానికి పాక్షికంగా సంబంధం కలిగి వున్నాయి.	1. క్రీడాకారులు, ఫుట్ బాల్ క్రీడాకారులు మరియు క్రికెటరు 2. బాలురు, విద్యార్థులు, ఏడవ తరగతి బాలురు 3. టెన్నిస్ అభిమానులు, క్రికెట్ అభిమానులు, కబడ్డీ అభిమానులు.
5	e		ఒక తరగతి మరొక తరగతిలో పూర్తిగా చొప్పించబడింది మరియు ఒక తరగతి పూర్తిగా మిగిలిన రెండింటికి భిన్నమైనది.	1.సూర్యుడు, చంద్రుడు, నక్షత్రాలు 2.స్టేషనరీ, కలము (పెన్), పెరుగు 3.పక్షి, గుడ్లగూబ, ఏనుగు
6	f		రెండు తరగతులు పాక్షికంగా మధ్య తరగతికి సంబంధించినవి కాని ఈ రెండు తరగతులకు సంబంధం లేదు.	1. పుష్పాలు, తామర, గులాబి 2. జంతువులు, కుక్క, పిల్లి 3. ఆహారం, పాలు, పండ్లు

Practice problems :

Indicate the group (a, b, c, d, e, f, g, h) to which given below belongs to

1. State, District, Mandal
2. Boys, Girls, Artistists
3. Hours, Days, Minutes
4. Women, Teacher, Doctor
5. Food, Curd, Spoon
6. Himans, Dancer, Player
7. Bulding, Brick, Bridge
8. Tree, Branch, Leaf
9. Gold, Silver, Jewelary
10. Bulbs, Mixtures, Electricals
11. Women, Illiteracy, Men
12. Medicine, Tablets, Syrup
13. Carrots, Oranges, Vegetables
14. Female, Mothers, Sisters
15. Table, Furniture, Chair
16. Fruits, Mango, Onions
17. School, Teacher, Students
18. Rivers, Oceans, Springs
19. India, Andhra Pradesh, Visakhapatnam
20. Animals, Cows, Horses
21. Fish, Tiger, snakes
22. Flowers, Jasmine, Banana
23. Authors, teachers, Men
24. Dog, Fish, Parrot
25. Rose, Flower, Apple
26. School, Benches, Class Room
27. Pen, Stationary, Powder
28. Crow, Pigeon, Bird
29. Mammals, Elephants, Dinosaurs
30. Writers, Teachers, Researchers

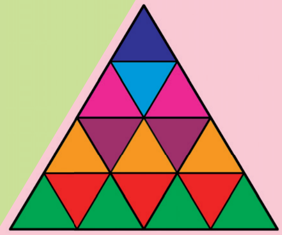
ప్రశ్నలను ప్రాక్టీస్ చేయండి :

పై పట్టికలోని ఏ సమూహం (A, B, C, D, E, F), క్రింద ఇచ్చిన ప్రశ్నలకు చెందినదో సూచించండి.

1. రాష్ట్రము, జిల్లా, మండలం
2. బాలురు, బాలికలు, కళాకారులు
3. గంటలు, రోజులు, నిమిషాలు
4. మహిళలు, ఉపాధ్యాయుడు, వైద్యుడు
5. ఆహారము, పెరుగు, చెంచా
6. మానవులు, నాట్యకారుడు, ఆటగాడు
7. భవనము, ఇటుక, వంతెన
8. చెట్టు, కొమ్మ, ఆకు
9. బంగారం, వెండి, ఆభరణాలు
10. బల్బులు, స్విచ్‌లు, ఎలక్ట్రికల్స్
11. మహిళలు, నిరక్షరాస్యత, పురుషులు
12. మందులు, మాత్రలు, సిరప్
13. క్యారెట్లు, ఆరెంజ్‌లు, కూరగాయలు
14. జగ్, పుస్తకం, కుండ
15. బల్ల, ఫర్నిచర్, కుర్చీ
16. పండ్లు, మామిడి, ఉల్లి
17. పాఠశాల, ఉపాధ్యాయుడు, విద్యార్థులు
18. అరటి, చొక్కా, బల్బ్
19. భారతదేశం, ఆంధ్రప్రదేశ్, విశాఖపట్టణం
20. జంతువులు, ఆవులు, గుర్రాలు
21. చేప, పులి, పాములు
22. పూలు, మల్లెపూలు, అరటి
23. రచయితలు, ఉపాధ్యాయులు, పురుషులు
24. కుక్క, చేప, చిలుక
25. గులాబి, పుష్పం, ఆపిల్
26. స్కూలు, క్లాస్ రూమ్, బెంచీలు
27. కలము, స్టేషనరీ, పౌడర్
28. కాకి, పావురం, పక్షులు
29. క్షీరదాలు, ఏనుగులు, డైనోసార్లు
30. రచయితలు, ఉపాధ్యాయులు, పరిశోధకులు

Chapter 5

TRIANGLES



Learning Outcomes

The learner is able to,

- measure the sides and angles of a triangle.
- classify the triangles based on sides and angles.
- find unknown measurements in a triangle by using the properties of triangles.
- explain the propertes of interior and exterior angles of a triangle.
- verify the properties of angles and sides of a triangle.
- understand and differentiate the concurrent points to a triangle.
- establish congruence criterion for the pairs of triangles such as SSS, SAS, ASA and RHS.
- identify the suitable congruency criterion in pair of triangles.

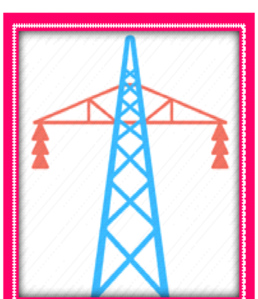
Content Items

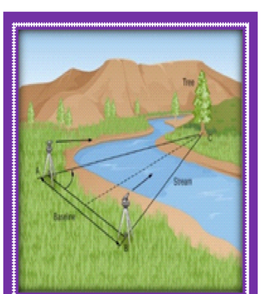
5.0 Introduction
5.1 Classification of triangles
5.2 Interior angles sum property
5.3 Exterior angle property
5.4 Properties of sides of a triangle
5.5 Concurrent points of a triangles
5.6 Congruence of triangles

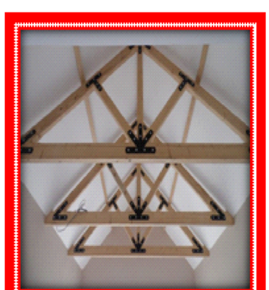
Q7A7Y5

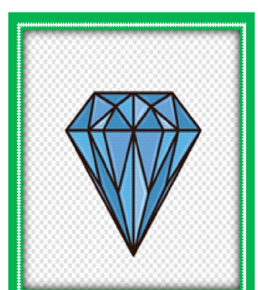
5.0 Introduction:

We have learnt about triangle and it's parts in the previous class. Triangle is one of the basic shape in geometry. We use triangle shapes in several situations of our daily life. It is used in bridge construction like long hanging bridges and other structures for more strength and stability. They are also used in high tension electric towers, buildings, land surveying, signal towers, roof constructions, Astronomy, Navigation, Physics etc. because this shape absorbs the pressure and remain rigid. Look at the pictures and speak about them. What do you observe?



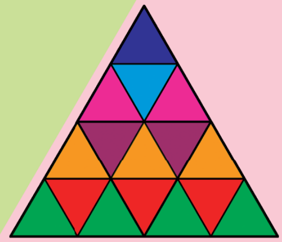






అధ్యాయం

5 త్రిభుజాలు



అభ్యసన ఫలితాలు

అభ్యాసకుడు :

- త్రిభుజం యొక్క భుజాలను మరియు కోణాలను కొలవగలడు.
- త్రిభుజములను కోణములు, భుజముల ఆధారంగా వర్గీకరించగలడు.
- త్రిభుజ ధర్మములను ఉపయోగించి త్రిభుజంలోని మిగిలిన విలువలను కనుగొనగలడు.
- త్రిభుజములోని అంతరకోణ, బాహ్యకోణముల ధర్మములను వివరించగలడు.
- త్రిభుజములోని కోణములు, భుజముల ధర్మములను సరిచూడగలడు.
- త్రిభుజములోని మిళిత బిందువులను అవగాహన చేసుకొనగలడు మరియు వాటి మధ్య గల వ్యత్యాసములు గుర్తించగలడు.
- త్రిభుజములకు సర్వసమానత్వ నియమములు భు. భు. భు.భు. భు. కో. భు. కో. భు. కో మరియు లం. క. భు. లను ఏర్పరుచును.
- త్రిభుజాల జతలకు సరైన సర్వసమానత్వమును గుర్తించగలడు.

విషయాంశాలు

5.0 పరిచయం

5.1 త్రిభుజాలవర్గీకరణ

5.2 అంతర్ కోణముల మొత్తము – ధర్మము

5.3 త్రిభుజ బాహ్యకోణధర్మము

5.4 త్రిభుజం యొక్క భుజముల ధర్మములు

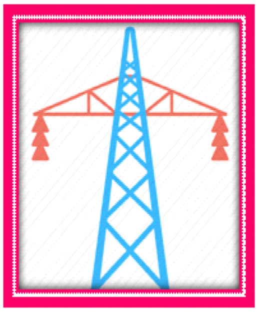
5.5. త్రిభుజం యొక్క మిళిత బిందువులు

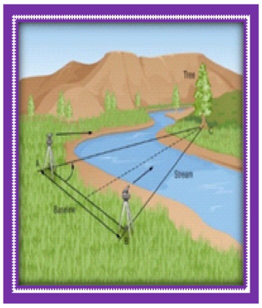
5.6. త్రిభుజాల సర్వ సమానత్వం.

Q7A7Y5

5.0 పరిచయం :

క్రింది తరగతిలో త్రిభుజాలు మరియు వాటి భాగాలు గురించి నేర్చుకున్నాము. త్రిభుజము రేఖాగణితంలో ఒక ప్రాథమిక ఆకారం. మన నిత్య జీవిత సందర్భాలలో త్రిభుజాకారాలను అనేక సందర్భాలలో ఉపయోగిస్తున్నాం. త్రిభుజాకారాలను బ్రిడ్జీల నిర్మాణలకు ముఖ్యంగా అతి పొడవైన వ్రేలాడే వంతెనలు మరియు ధృడమైన మరియు స్థిరమైన నిర్మాణాలకు ఉపయోగిస్తున్నాం. అధిక అధిక విద్యుత్‌ను ప్రసారం చేసే స్వభాలు గల విద్యుత్ టవర్స్? భవనాలు, భూములసర్వే, సిగ్నల్ టవర్స్, పైకప్పులు నిర్మాణాలలో, నావిగేషన్ మరియు భౌతికశాస్త్రము మొదలగు వాటిలో కూడా త్రిభుజ ఆకారాలను ఉపయోగిస్తారు. ఎందుకనగా ఈ ఆకారం ఒత్తిడిని గ్రహించి స్థిరంగా ఉంటుంది. క్రింది చిత్రాలను చూసి, వాటి గురించి చర్చించండి? మీరు ఏమి గమనించారు?

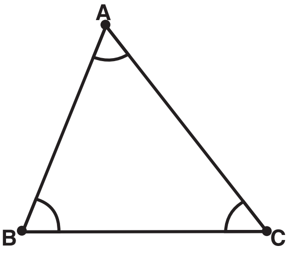




We can observe so many triangles in the above pictures, they are in different sizes. To know their properties, it is needed to learn more about triangles. In this chapter, we are going to learn about classification of triangles, properties of triangles, concurrent points and congruence of triangles. Before going to discuss these concepts in detail, let us recall and review the previous concepts what we have learnt in previous class.

A triangle is a simple closed plane figure formed by three line segments.

A triangle has three vertices, three sides and three angles. A triangle can be named in either clockwise or anti clockwise direction, i.e. ΔACB or ΔABC.



Look at the adjacent figure. The elements in ΔABC are:

i) three vertices: A, B and C

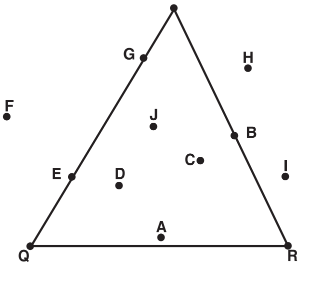
ii) three angles: $\angle A$, $\angle B$ and $\angle C$

iii) three sides: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ and $\overline{CA}$

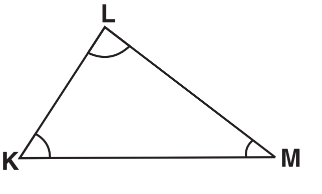
The opposite side to vertex A is $\overline{BC}$ and similarly, the opposite sides to vertices B and C are $\overline{AC}$ and $\overline{AB}$ respectively.

Review Exercise

1. Mark any three non collinear points A, B and C in your note book, join them to make a triangle and name it.



2. Observe the given triangle and answer the following:
   i) Write the interior points of the triangle.
   ii) Write the points marked on the triangle.
   iii) Write the exterior points of the triangle.

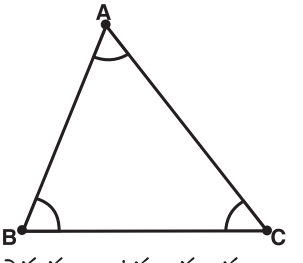


3. Observe the given triangle and answer the following:
   i) The opposite side to vertex L is ________
   ii) The opposite side to $\angle K$ is _______
   iii) The opposite angle to $\overline{KL}$ is _____
   iv) The opposite vertex to $\overline{LM}$ is _______

పైన చూపిన పటములలో మనము చాలా రకాల త్రిభుజములను గమనించవచ్చు, అవి వివిధ రకాల పరిమాణాలలో ఉన్నాయి. త్రిభుజముల ధర్మములను అవగాహన చేసుకొనుటకు వాటి గురించి మరికొన్ని అంశాలు తెలుసుకొనుట అవసరం. ఈ అధ్యాయంలో త్రిభుజముల వర్గీకరణ, త్రిభుజముల ధర్మాలు, మిళిత బిందువులు, త్రిభుజాల సర్వసమానత్వం మొదలగు విషయాల గురించి మనం నేర్చుకుందాం. ఈ విషయాలను చర్చించుటకు ముందుగా క్రింది తరగతులలో నేర్చుకున్న త్రిభుజానికి సంబంధించిన పూర్వజ్ఞానాన్ని గుర్తుకు తెచ్చుకుందాం.

మూడు రేఖా ఖండాలచే ఏర్పడిన సరళ సంవృత పటమును త్రిభుజం అంటారు.

త్రిభుజమునకు మూడు శీర్షములు, మూడు భుజములు మరియు మూడు కోణములు కలవు. త్రిభుజమునకు సవ్య లేదా అపసవ్య దిశలలో పేరు పెట్టవచ్చు. అనగా ΔACB లేదా ΔABC



ప్రక్క పటము నుండి, త్రిభుజము ABC లోని అంశములు ఏమనగా,

i) మూడు శీర్షములు: A, B మరియు C

ii) మూడు కోణములు: $\angle A$, $\angle B$ మరియు $\angle C$

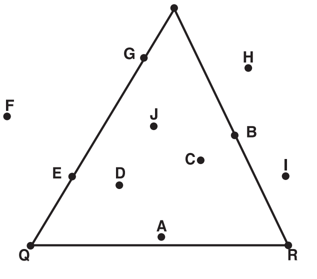
iii) మూడు భుజములు: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ మరియు $\overline{CA}$.

శీర్షము Aకు ఎదురుగా ఉన్న భుజము $\overline{BC}$, ఆదేవిధంగా B మరియు C లకు ఎదురుగా ఉన్న భుజములు వరుసగా $\overline{AC}$ మరియు $\overline{AB}$.

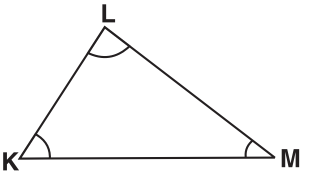
పునర్విమర్శ అభ్యాసం

1. ఏవైనా మూడు సరేఖీయాలు కాని బిందువులు A, B మరియు C లను కాగితము పై గుర్తించుము వాటిని కలిపి త్రిభుజము గీసి పేరు పెట్టుము.

2. ఇచ్చిన త్రిభుజమును పరిశీలించి, క్రింది వాటికి జవాబు వ్రాయండి.
   i) త్రిభుజము యొక్క అంతర బిందువులు రాయండి.
   ii) త్రిభుజము పైన ఉన్న బిందువులు రాయండి.
   iii) త్రిభుజము యొక్క బాహ్య బిందువులు రాయండి.



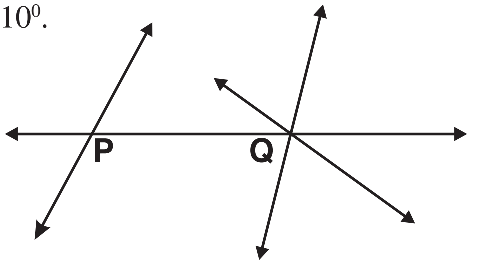
3. ఇచ్చిన త్రిభుజమును పరిశీలించి, క్రింది వాటికి సమాధానం రాయండి.
   i) శీర్షము L నకు ఎదురుగా ఉన్న భుజము ________
   ii) $\angle K$ కుఎదురుగా ఉన్న భుజము ________
   iii) $\overline{KL}$ నకు ఎదురుగా ఉన్న కోణము ________
   iv) $\overline{LM}$ నకు ఎదురుగా ఉన్న శీర్షము ________.



4. Classify the following angles into acute, obtuse and right angles :

$20^0, 50^0, 102^0, 47^0, 125^0, 65^0, 36^0, 90^0, 95^0$ and 110^0.

5. Identify the intersecting point and concurrent point in the adjust figure.

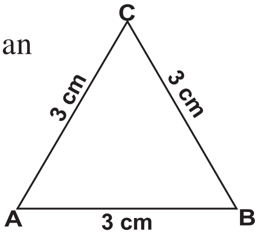


5.1 Classification of triangles :

Based on the length of the sides, the triangles are classified into three types.

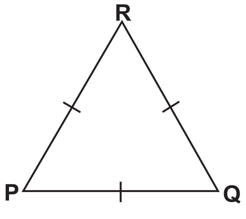
They are:

1. ***Equilateral Triangle:*** A triangle with three equal sides is called an Equilateral Triangle.



Ex: i) In ΔABC, AB = BC = CA = 3cm

ii) In ΔPQR, PQ = QR = RP

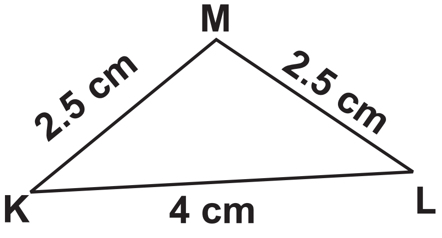


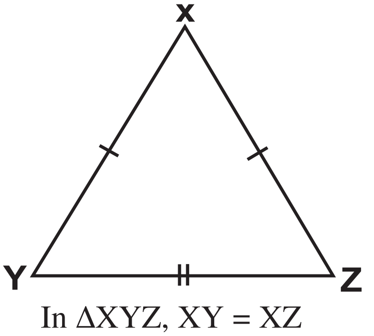
Do you know?

The sides with equal length are denoted with same number of strokes similiarly for equal angles too.

2. **Isosceles Triangle :** A triangle with two equal sides is called an Isosceles Triangle.

Ex :



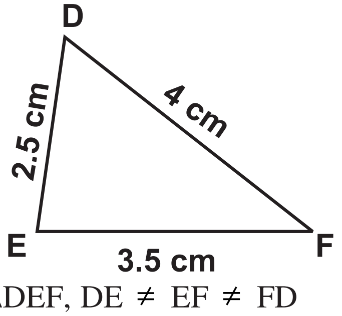


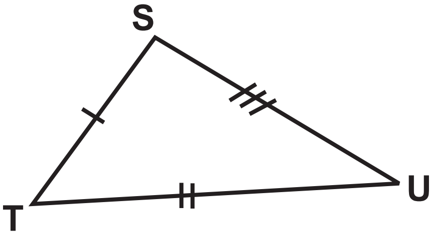
i) In ΔKLM, KM = ML = 2.5 cm

ii) In ΔXYZ, XY = XZ

3. **Scalene Triangle:** A triangle with no two sides are equal is called a Scalene Triangle.

Ex :



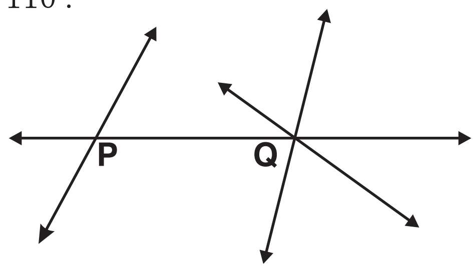


i) In ΔDEF, DE ≠ EF ≠ FD

ii) In ΔSTU, ST ≠ TU ≠ US

4. క్రింద ఇచ్చిన కోణాలను అల్ప, అధిక మరియు లంబకోణములుగా వర్గీకరించండి.
20^0, 50^0, 102^0, 47^0, 125^0, 65^0, 36^0, 90^0, 95^0 మరియు 110^0.

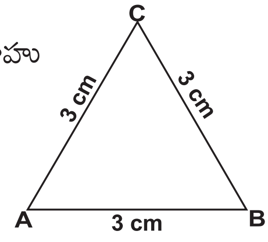
5. ప్రక్క పటము నుండి ఖండన బిందువు మరియు మిళిత బిందువును వ్రాయండి.



5.1 త్రిభుజాల వర్గీకరణ (త్రిభుజములలో రకములు) :

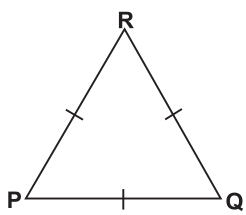
భుజాల కొలతల ఆధారంగా, త్రిభుజములను మూడు రకాలుగా వర్గీకరించవచ్చు. అవి :

1. సమబాహు త్రిభుజం : అన్ని భుజములు సమానముగా ఉన్న త్రిభుజమును సమబాహు త్రిభుజం అంటారు.



ఉదాహరణ : i) ΔABC లో, $AB = BC = CA = 3$ సెం.మీ.

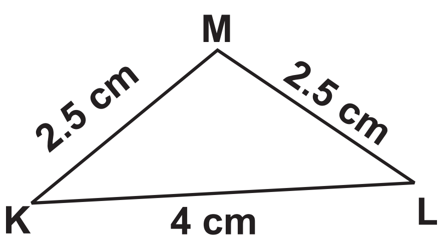
ii) ΔPQR లో $PQ = QR = RP$.

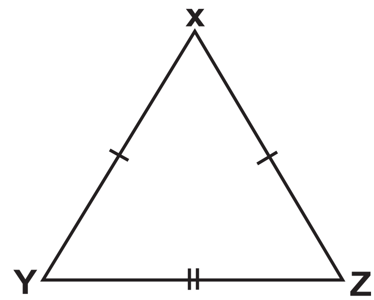


మీకు తెలుసా?
సమాన భుజములను సమాన సంఖ్య గల గీతలతో సూచిస్తారు. అదేవిధంగా సమాన కోణాలను కూడా సమాన సంఖ్య గల గీతలతో సూచిస్తారు.

2. సమద్విబాహు త్రిభుజం : రెండు భుజములు సమానముగా ఉన్న త్రిభుజమును సమద్విబాహుత్రిభుజం అంటారు.

ఉదా :



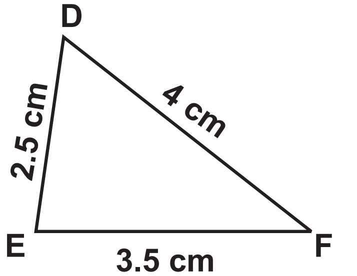


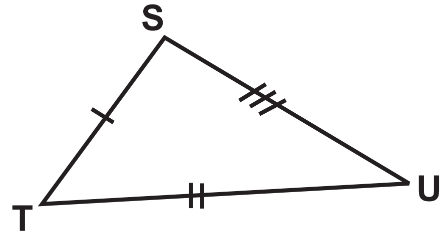
i) ΔKLM లో $KM = ML = 2.5$ సెం.మీ.

ii) ΔXYZ లో $XY = XZ$.

3. విషమబాహు త్రిభుజం : ఏ రెండు భుజములు సమానముగా లేని త్రిభుజమును విషమబాహు త్రిభుజము అంటారు.

ఉదా :



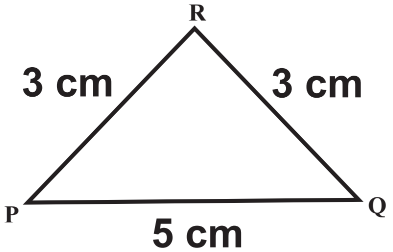


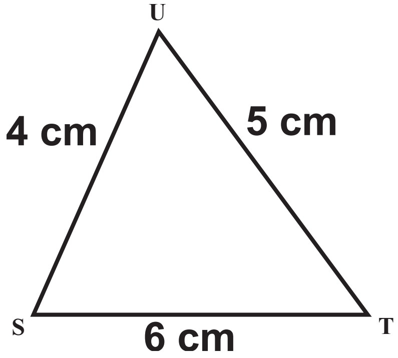
i) ΔDEF లో $DE \neq EF \neq FD$.

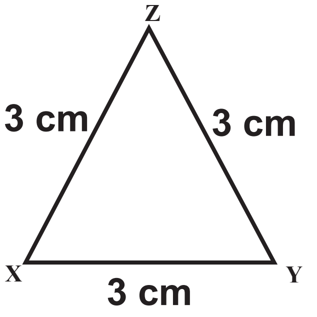
ii) ΔSTU లో $ST \neq TU \neq US$.

Check Your Progress

Classify the following triangles according to the length of their sides:



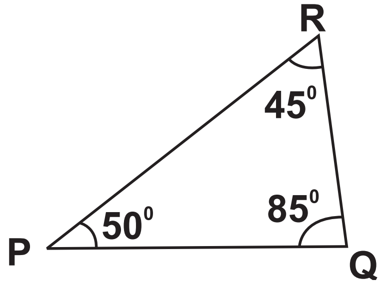


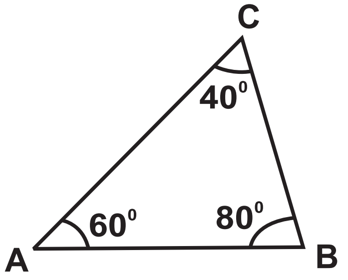


Based on the measure of the angles, triangles are classified into three types. They are :

1. **Acute angled triangle:** A triangle with all acute angles is called an Acute angled triangle.

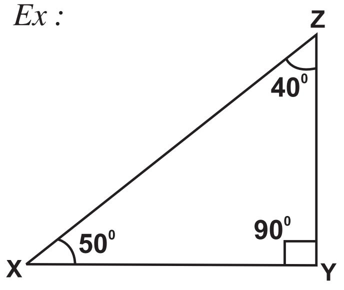
Ex :

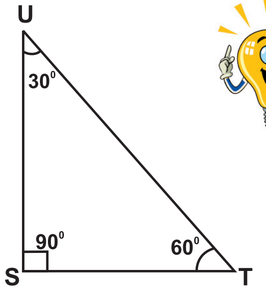




2. **Right angled triangle:** A triangle with one right angle is called a right angled triangle.

Ex :



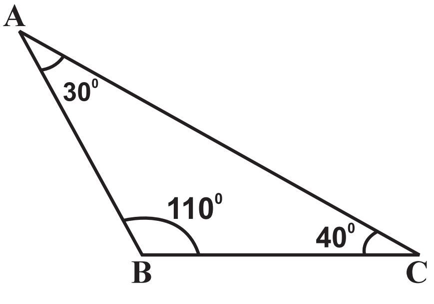


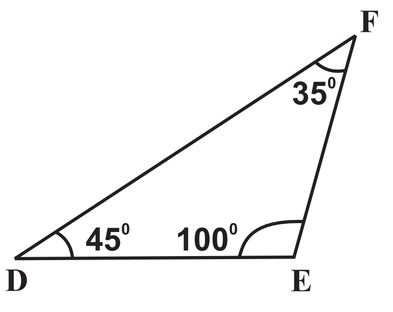
Do you know?

In a right angled triangle, the side opposite to right angle is called 'Hypotenuse'.

3. **Obtuse angled triangle:** A triangle with one obtuse angle is called an obtuse angled triangle.

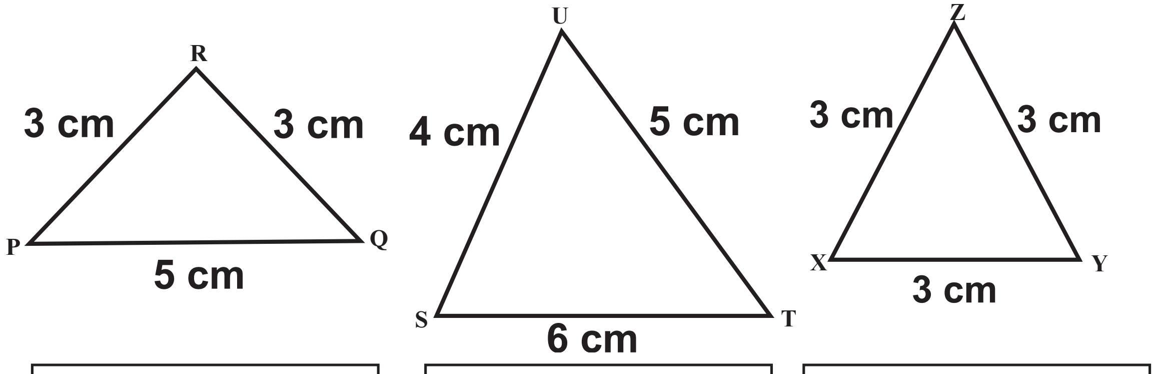
Ex :





నీ ప్రగతిని తెలుసుకో

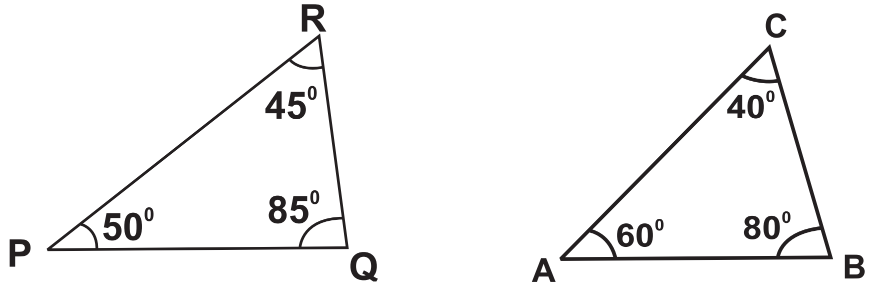
క్రింద ఇచ్చిన త్రిభుజములను భుజముల కొలతల ఆధారంగా వర్గీకరించండి.



కోణాల కొలతలు ఆధారంగా త్రిభుజములను మూడు రకాలుగా వర్గీకరించవచ్చు. అవి :

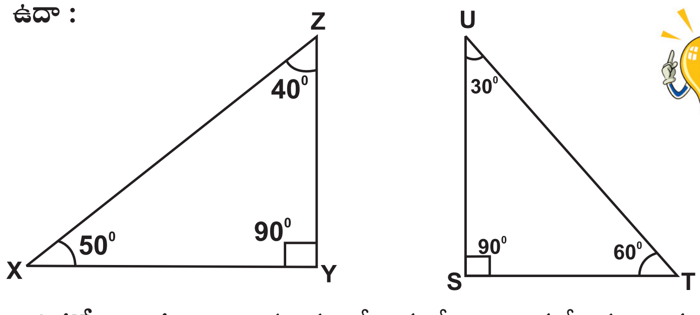
1. **అల్పకోణ త్రిభుజం:** త్రిభుజము యొక్క అన్ని కోణములు అల్పకోణములుగా గల త్రిభుజమును అల్పకోణ త్రిభుజం అంటారు.

   ఉదా :



2. **లంబకోణ త్రిభుజం :** త్రిభుజములో ఒక కోణం లంబకోణము గల త్రిభుజమును లంబకోణ త్రిభుజం అంటారు.

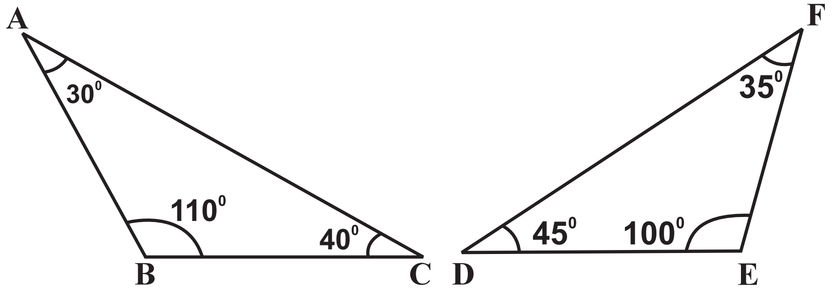
   ఉదా :



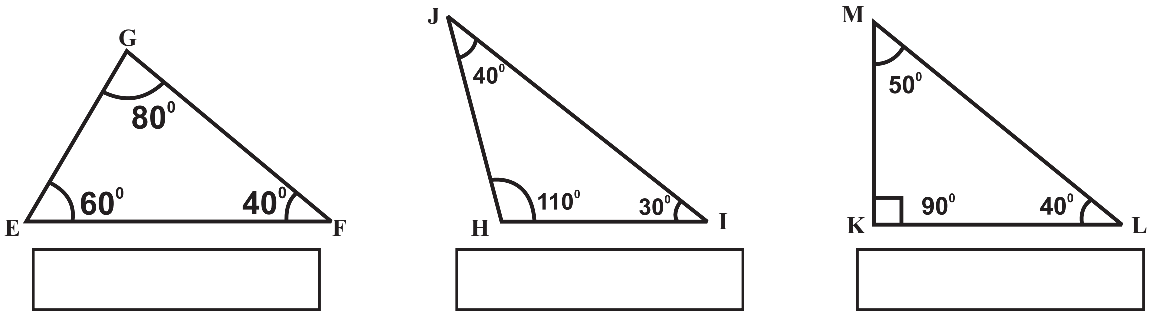
> **మీకు తెలుసా?**
> లంబకోణ త్రిభుజములో లంబకోణానికి ఎదురుగా ఉండే భుజాన్ని 'కర్ణము' అంటారు.

3. **అధికకోణ త్రిభుజం :** త్రిభుజములో ఒక కోణం అధికకోణముగా గల త్రిభుజమును అధికకోణ త్రిభుజం అంటారు.

   ఉదా :

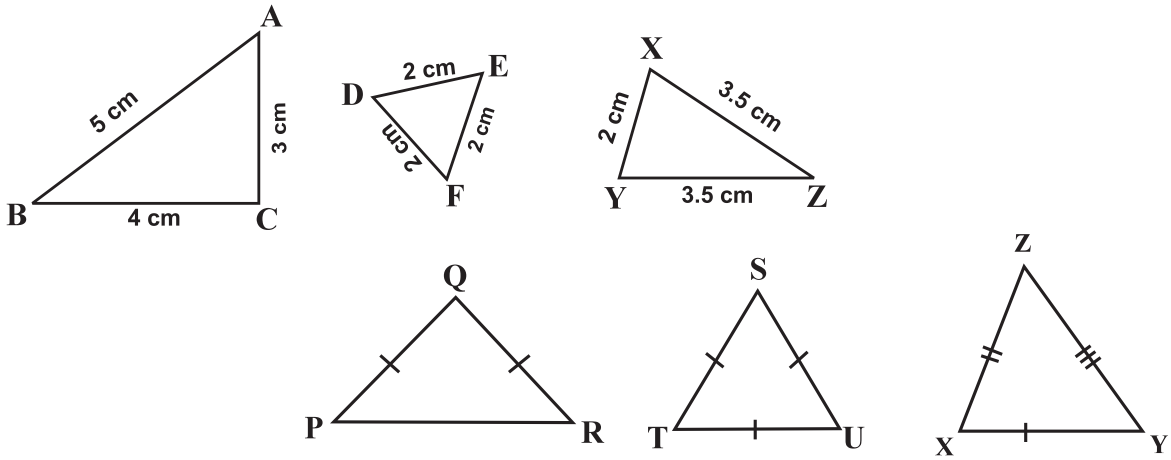


Check Your Progress Classify the following triangles according to the measure of their angles.

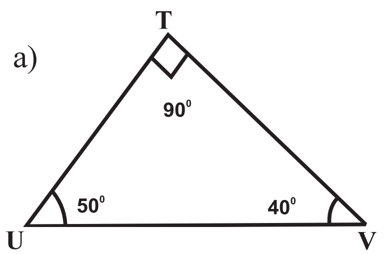


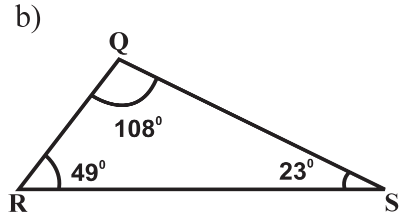
Exercise - 5.1

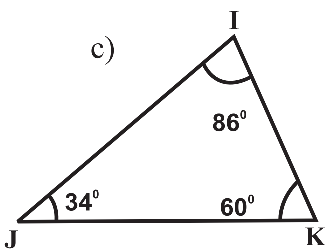
1. Classify the following triangles based on the length of their sides:



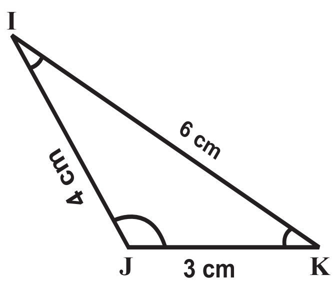
2. Classify the following triangles based on the measure of angles:

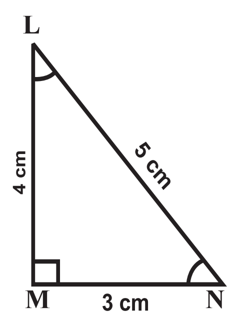
a) 

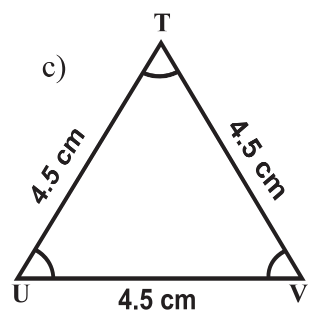
b) 

c) 

3. Classify the following triangles based on their sides and also on their angles:

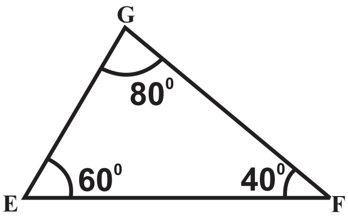
a) 

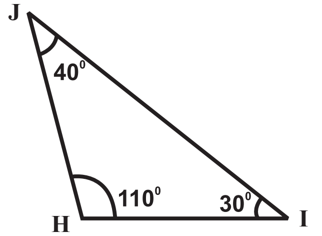
b) 

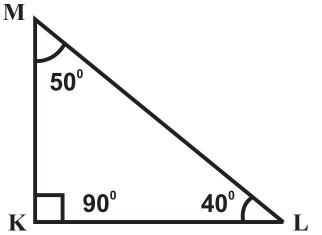
c) 

నీ ప్రగతిని తెలుసుకో

కింద ఇచ్చిన త్రిభుజములను కోణముల ఆధారంగా వర్గీకరించండి.

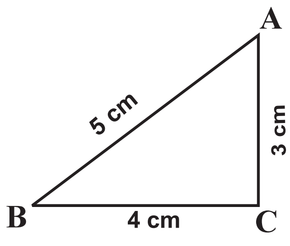


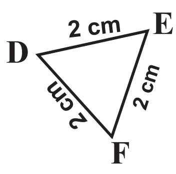


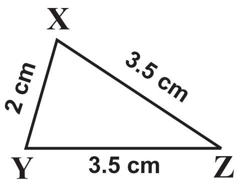


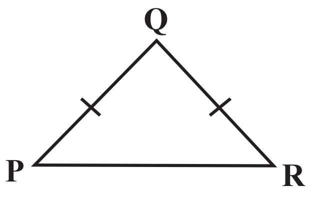
అభ్యాసం - 5.1

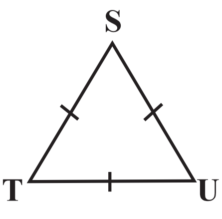
1. క్రింద ఇచ్చిన త్రిభుజములను భుజముల ఆధారంగా వర్గీకరించండి.

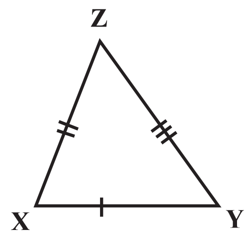






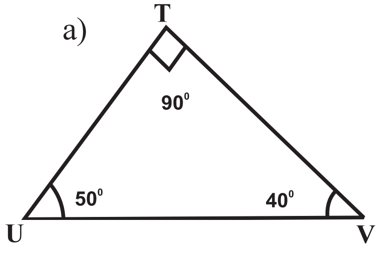




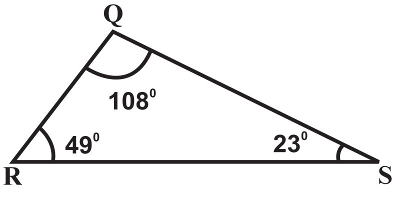


2) క్రింద ఇచ్చిన త్రిభుజములను కోణముల ఆధారంగా వర్గీకరించండి.

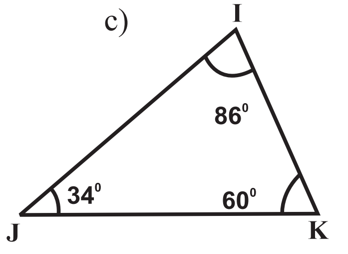
a)



b)

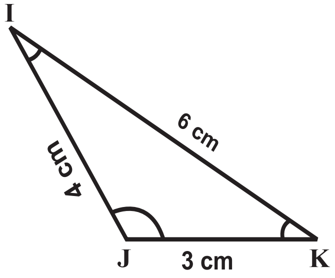


c)

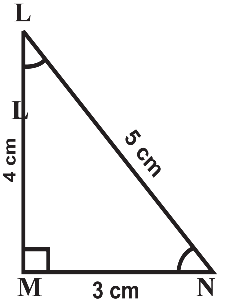


3) క్రింద ఇచ్చిన త్రిభుజములను కోణములు, భుజముల ఆధారంగా వర్గీకరించండి.

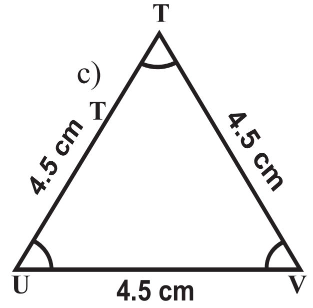
a)



b)

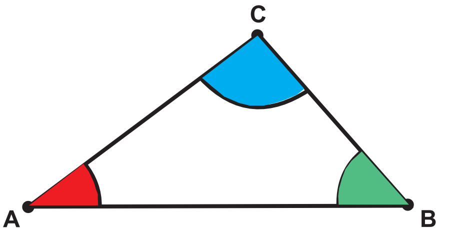


c)

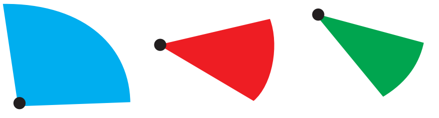


5.2 Interior Angles sum Property:

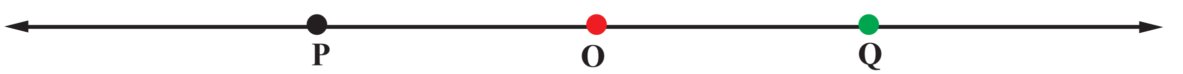
1. On a white paper, draw a triangle ABC. Using colour pencils, colour its angles as shown in the figure.



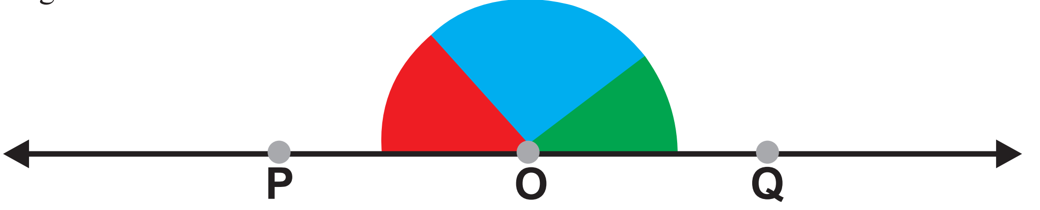
2. Using a scissors, cut out the three angular regions.



3. Draw a line PQ and mark a point 'O' on it.



4. Paste the three angular cut outs adjacent to each other to form one angle at 'O' as shown in the figure given below.



You will find that three angles now constitute a straight angle.

Thus, ***the sum of three interior angles of a triangle is equal to 180⁰.***

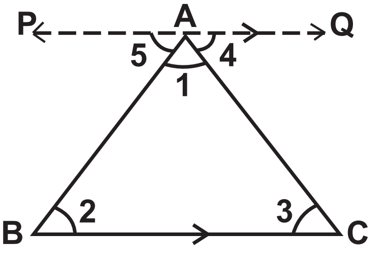
Proof of the interior angle-sum property of a triangle :

Statement: The sum of the interior angles of a triangle is 180^0.

Given : ABC is a triangle

To prove : $\angle A + \angle B + \angle C = 180^0$

Construction : Draw a line $\overleftrightarrow{PQ}$, through 'A' parallel to $\overline{BC}$



Proof :

Mark the angles as indicated in the figure:

$\angle 2 = \angle 5$ ⟶ (i) (why?)

$\angle 3 = \angle 4$ ⟶ (ii) (why?)

(i) + (ii) $\Rightarrow \angle 2 + \angle 3 = \angle 5 + \angle 4$

$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = \angle 1 + \angle 5 + \angle 4$ (adding $\angle 1$ on both sides)

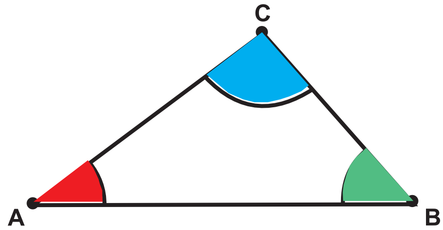
$\angle 1 + \angle 5 + \angle 4 = 180^0$ (linear angles)

Therefore, $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^0$

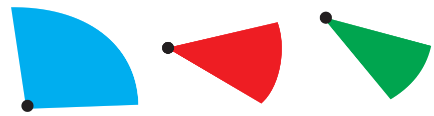
$\angle A + \angle B + \angle C = 180^0$. Hence proved.

5.2 అంతర కోణముల మొత్తము - ధర్మము :

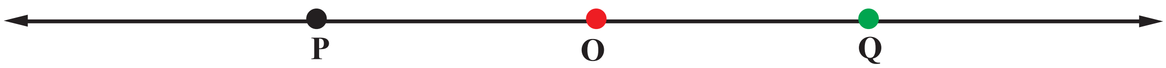
1. ఒక తెల్లకాగితం పై ABC త్రిభుజమును గీయండి. రంగు పెన్సిల్ తో కోణములకు పటములో చూపినట్లు రంగులు వేయండి.



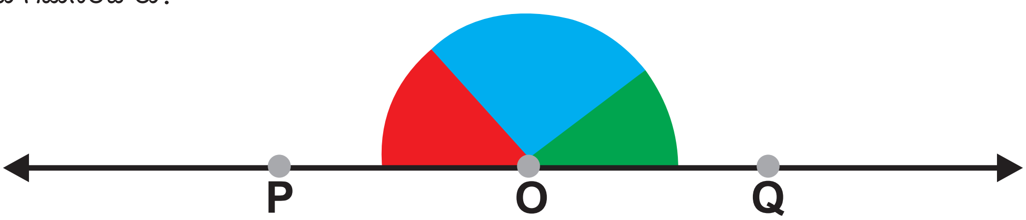
2. కత్తెరతో మూడు కోణ భాగములను కత్తిరించండి.



3. PQ అను రేఖను గీయండి దానిపై 'O' బిందువును గుర్తించండి.



4. క్రింది పటంలో చూపినట్లు 'O' వద్ద ఒకే కోణం ఏర్పడునట్లు కత్తిరించిన కోణ భాగములను పక్క పక్కనే అతికించండి. ఏమి గమనించారు?



మూడు కోణముల భాగములు సరళరేఖపై 180^0 కోణం ఏర్పరచడాని మీరు గమనించవచ్చు. కనుక ***త్రిభుజములోని మూడు అంతర కోణాల మొత్తము 180^0 అనిచెప్పవచ్చు.***

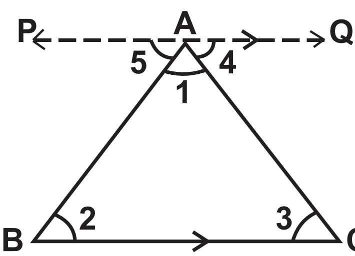
త్రిభుజములో అంతర కోణముల మొత్తము 180^0 అను ధర్మమునకు ఒక నిరూపణ :

ప్రవచనము : ఒక త్రిభుజములో అంతర కోణముల మొత్తము 180^0.

దత్తాంశము : ABC ఒక త్రిభుజము.

సారాంశము : $\angle A + \angle B + \angle C = 180^0$.

నిర్మాణము : శీర్షము 'A' గుండా $\overline{BC}$ భుజమునకు సమాంతరముగా $\overleftrightarrow{PQ}$ అను రేఖను గీయండి.



నిరూపణ : పటంలో చూపిన విధంగా కోణములను గుర్తించండి.

$\angle 2 = \angle 5 \longrightarrow$ (i) (ఎందుకు?)

$\angle 3 = \angle 4 \longrightarrow$ (ii) (ఎందుకు?)

$(i) + (ii) \Rightarrow \angle 2 + \angle 3 = \angle 5 + \angle 4$

$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = \angle 1 + \angle 5 + \angle 4$ (ఇరు వైపులా $\angle 1$ను కూడగా)

$\angle 1 + \angle 5 + \angle 4 = 180^0$ (సరళరేఖపై ఒక బిందువు వద్ద కోణం)

కావున, $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^0$

$\angle A + \angle B + \angle C = 180^0$ నిరూపించబడింది.

Example 1 : In a triangle, two of the angles are 43^0 and 57^0. Find the third angle.

Solution : Given two angles of a triangle are 43^0 and 57^0

Sum of these two angles = $43^0 + 57^0 = 100^0$

In a triangle the sum of the interior angles is equal to 180^0.

$\therefore$ Third angle = $180^0 - 100^0 = 80^0$

Example 2 : Find the value of 'x' in the following triangles:

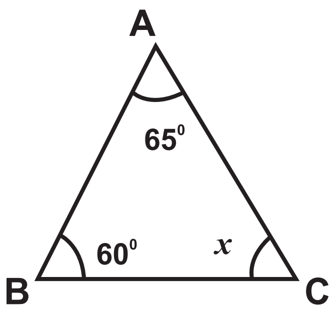


Fig. (i)

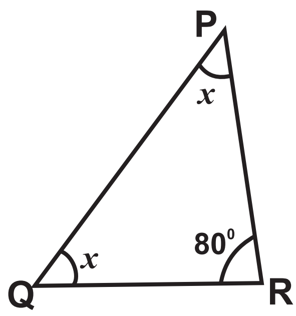


Fig. (ii)

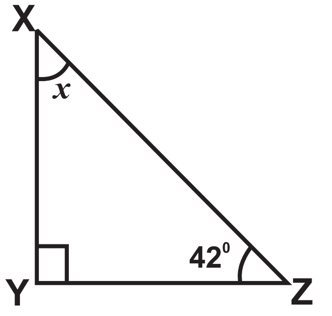


Fig. (iii)

Solution: From the fig. (i)

$\angle A + \angle B + \angle C = 180^0$ ($\because$ Sum of three angles in triangle is 180^0)

$65^0 + 60^0 + x = 180^0$ $\Rightarrow 125^0 + x = 180^0$

$x = 180^0 - 125^0 = 55^0$

From the fig. (ii)

$\angle P + \angle Q + \angle R = 180^0$ (why?)

$x + x + 80^0 = 180^0$ $\Rightarrow 2x + 80^0 = 180^0$

$2x = 180^0 - 80^0 = 2x = 100^0 \Rightarrow x = \dfrac{100^\circ}{2} = 50^\circ \Rightarrow x = 50^0$

From the fig. (iii)

$\angle X + \angle Y + \angle Z = 180^0$ (why?)

$x + 90^0 + 42^0 = 180^0 \Rightarrow x + 132^0 = 180^0$

$x = 180^0 - 132^0$ $\therefore x = 48^0$

ఉదాహరణ 1 : ఒక త్రిభుజం లోని రెండు కోణములు 43^0 మరియు 57^0 అయిన మూడవ కోణమును కనుగొనండి.

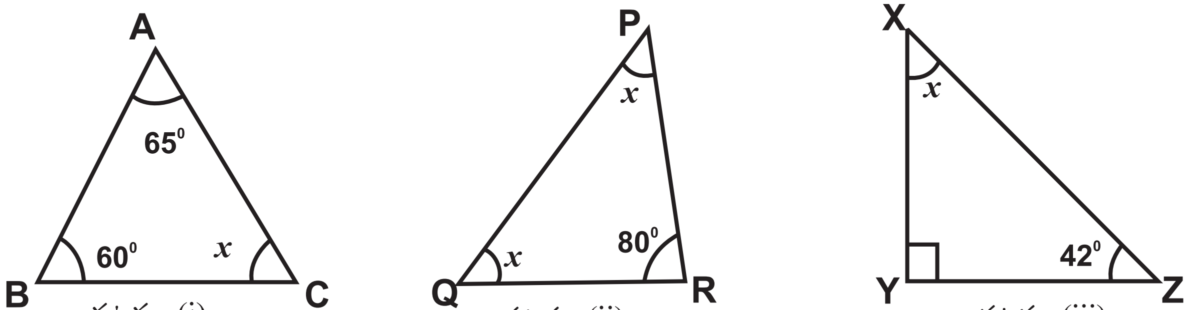
సాధన : దత్తాంశం నుండి త్రిభుజములోని రెండు కోణములు 43^0 మరియు 57^0

ఈ రెండు కోణముల మొత్తము = $43^0 + 57^0 = 100^0$

త్రిభుజములో అంతర కోణముల మొత్తము 180^0

$\therefore$ మూడవకోణం = $180^0 - 100^0 = 80^0$

ఉదాహరణ 2 : క్రింద ఇచ్చిన త్రిభుజములలో 'x' విలువను కనుగొనండి.



పటము (i) పటము (ii) పటము (iii)

సాధన : పటము (i) నుండి

$\angle A + \angle B + \angle C = 180^0$ ($\because$ త్రిభుజములో అంతర కోణముల మొత్తము 180^0)

$65^0 + 60^0 + x = 180^0$ $\Rightarrow 125^0 + x = 180^0$

$x = 180^0 - 125^0 = 55^0$

పటము (ii) నుండి

$\angle P + \angle Q + \angle R = 180^0$ (ఎందుకు?)

$x + x + 80^0 = 180^0$ $\Rightarrow 2x + 80^0 = 180^0$

$$2x = 180^0 - 80^0 = 2x = 100^0 \Rightarrow x = \frac{100^\circ}{2} = 50^\circ \Rightarrow x = 50^0$$

పటము (iii) నుండి

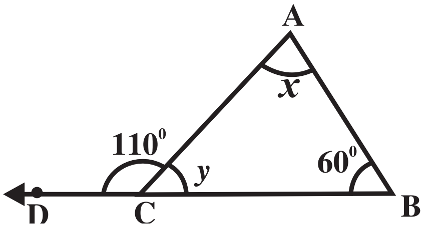
$\angle X + \angle Y + \angle Z = 180^0$ (ఎందుకు?)

$x + 90^0 + 42^0 = 180^0$

$x + 90^0 + 42^0 = 180^0 \Rightarrow x + 132^0 = 180^0$

$x = 180^0 - 132^0$ $\therefore x = 48^0$

Example 3: Find the values of x and y in the given triangle.



Solution : In the ΔABC,

$\angle ACD + \angle ACB = 180^0$ (linear pair of angles)

$110^0 + y = 180^0$

$y = 180^0 - 110^0$

$y = 70^0 \longrightarrow$ (i)

$\angle BAC + \angle ACB + \angle CBA = 180^0$ (Why?)

$x + y + 60^0 = 180^0$

$x + 70^0 + 60^0 = 180^0$ (From (i))

$x + 130^0 = 180^0$

$x = 50^0$

Example 4 : In a right angled triangle one acute angle is 44^0. Find the other angle.

Solution : We know that, sum of the two acute angles in a right angled triangle is 90^0.

Given that, in the right angled triangle one of the acute angles = 44^0

Other acute angle in right angled triangle = $90^0 - 44^0 = 46^0$

Example 5 : The angles of a triangle are $(x + 10)^0$, $(x - 20)^0$ and $(x + 40)^0$. Find the value of x and the measure of the angles.

Solution : Given that the angles of the triangle are $(x + 10)^0$, $(x - 20)^0$ and $(x + 40)^0$.

$(x + 10)^0 + (x - 20)^0 + (x + 40)^0 = 180^0$ (why?)

$x + 10^0 + x - 20^0 + x + 40^0 = 180^0$

$3x + 30^0 = 180^0 \quad \Rightarrow \quad 3x = 180^0 - 30^0$

$3x = 150^0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{150^\circ}{3} = 50^\circ$

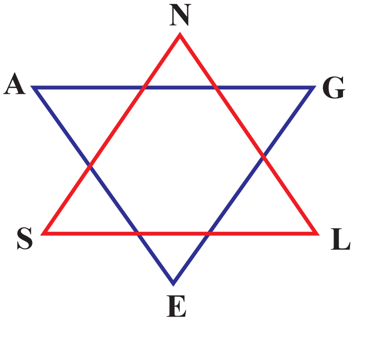
Each of the angles are, $x + 10^0 = 50^0 + 10^0 = 60^0$

$x - 20^0 = 50^0 - 20^0 = 30^0$

$x + 40^0 = 50^0 + 40^0 = 90^0$

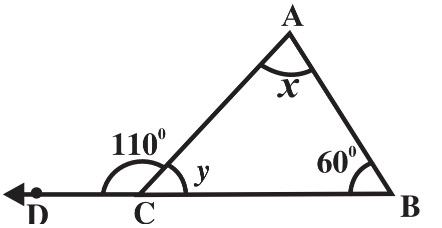
$\therefore$ Measure of the angles are 60^0, 30^0 and 90^0

Let's Explore



From the given figure, find the sum of $\angle A$, $\angle N$, $\angle G$, $\angle L$, $\angle E$ and $\angle S$.

ఉదాహరణ 3 : ఇచ్చిన త్రిభుజములో x మరియు y విలువలు కనుగొనండి.



సాధన: ΔABC లో,

$\angle ACD + \angle ACB = 180^0$ (రేఖీయ కోణాల ద్వయం)

$110^0 + y = 180^0$

$y = 180^0 - 110^0$

$y = 70^0 \longrightarrow$ (i)

$\angle BAC + \angle ACB + \angle CBA = 180^0$ (ఎందుకు?)

$x + y + 60^0 = 180^0$

$x + 70^0 + 60^0 = 180^0$ ((i) నుండి)

$x + 130^0 = 180^0$

$x = 50^0$

ఉదాహరణ 4 : లంబకోణ త్రిభుజములో ఒక అల్పకోణం 44^0 అయిన రెండవ అల్పకోణం కనుగొనండి.

సాధన : లంబకోణ త్రిభుజము లో రెండు అల్ప కోణముల మొత్తం 90^0లు అని మనకు తెలుసు.

దత్తాంశ ప్రకారం లంబకోణ త్రిభుజము లో ఒక అల్పకోణం = 44^0.

లంబకోణ త్రిభుజములో రెండవ అల్ప కోణం = $90^0 - 44^0 = 46^0$

ఉదాహరణ 5 : త్రిభుజంలోని కోణములు $(x + 10)^0$, $(x - 20)^0$ మరియు $(x + 40)^0$. ఆ కోణములలో x విలువను కనుగొనండి. ఆ కోణముల కొలతలను కనుగొనండి.

సాధన : దత్తాంశ ప్రకారం త్రిభుజంలోని కోణములు $(x + 10)^0$, $(x - 20)^0$ మరియు $(x + 40)^0$

$(x + 10)^0 + (x - 20)^0 + (x + 40)^0 = 180^0$ (ఎందుకు?)

$x + 10^0 + x - 20^0 + x + 40^0 = 180^0$

$3x + 30^0 = 180^0 \qquad \Rightarrow 3x = 180^0 - 30^0$

$3x = 150^0 \qquad \Rightarrow x = \frac{150^\circ}{3} = 50^\circ$

ఆ కోణాలు, $x + 10^0 = 50^0 + 10^0 = 60^0$

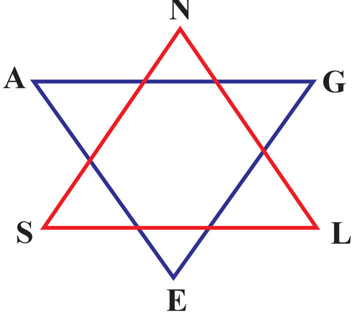
$x - 20^0 = 50^0 - 20^0 = 30^0$

$x + 40^0 = 50^0 + 40^0 = 90^0$

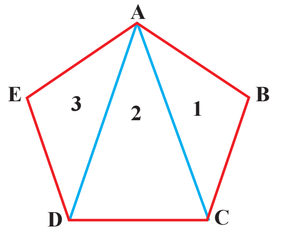
$\therefore$ కోణాల యొక్క కొలతలు 60^0, 30^0 మరియు 90^0

అన్వేషిద్దాం

ప్రక్క పటం నుండి $\angle A, \angle N, \angle G, \angle L, \angle E$ మరియు $\angle S$ కోణాల మొత్తాన్ని కనుగొనండి?



Example 6 : Find the sum of the interior angles in a pentagon.



Solution : Divide the pentagon into three triangles as shown in the fig.

Sum of the angles in $\Delta ABC = 180^0$

Sum of the angles in $\Delta ADC = 180^0$

Sum of the angles in $\Delta ADE = 180^0$

Sum of the interior angles in the pentagon = Sum of angles in ΔABC + Sum of the angles in ΔADC + Sum of the angles in ΔADE

$= 180^0 + 180^0 + 180^0 = 540^0$.

Let's think

Can you find a triangle in which each angle is less than 60^0?

Exercise - 5.2

1. Which of the following angles form a triangle?

   a) $60^0, 70^0, 80^0$

   b) $65^0, 45^0, 70^0$

   c) $40^0, 50^0, 60^0$

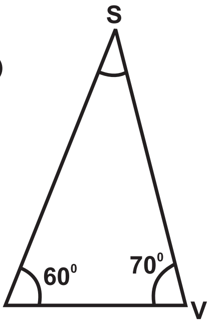
   d) $60^0, 30^0, 90^0$

   e) $38^0, 102^0, 40^0$

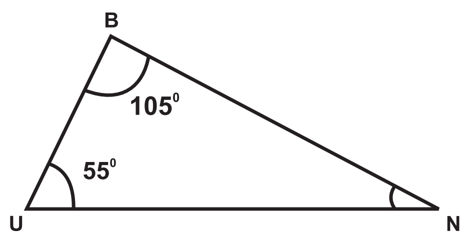
   f) $100^0, 30^0, 45^0$

2. Sum of two interior angles of a triangle is 105^0. Find the third angle.
3. In ΔPQR, $\angle P=65^0$, $\angle Q=50^0$. Find $\angle R$.
4. Find the missing angles in each of the following triangles.

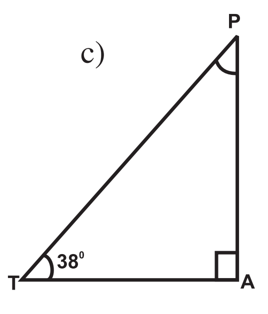
a)



b)

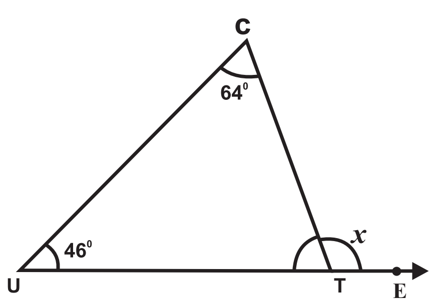


c)

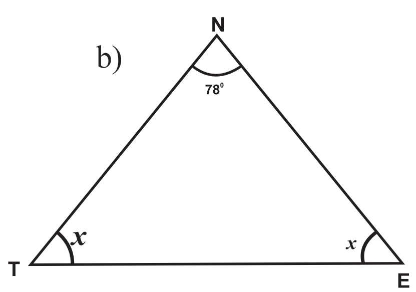


5. Find the value of 'x' in each of the given triangles.

a)

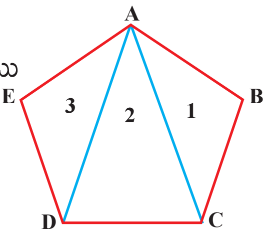


b)



ఉదాహరణ 6 : పంచభుజి యొక్క అంతర కోణముల మొత్తం కనుగొనండి .

సాధన: పటములో చూపినట్లు పంచభుజిని మూడు త్రిభుజములు గా విభజించుము



ΔABC లో కోణములమొత్తం = 180^0

ΔADC లోకోణముల మొత్తం =180^0

ΔADE లో కోణముల మొత్తం = 180^0

పంచభుజి యొక్క అంతర కోణముల మొత్తం = ΔABCలో కోణముల మొత్తం + ΔADCలో కోణముల మొత్తం + ΔADEలో కోణముల మొత్తం

= $180^0 + 180^0 + 180^0 = 540^0$.

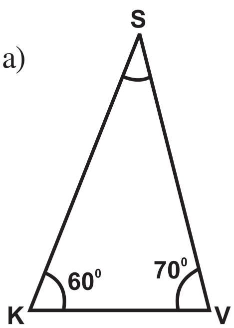
ఆలోచిద్దాం!

ప్రతీ కోణము 60 డిగ్రీల కన్నా తక్కువ ఉన్న త్రిభుజము సాధ్యమా?

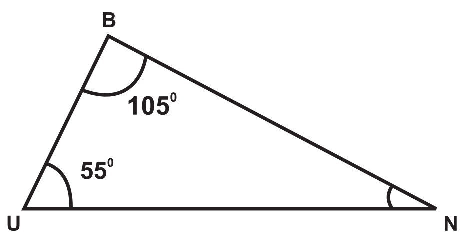
అభ్యాసం - 5.2

1. క్రింద ఇచ్చిన కోణములలో ఏవి త్రిభుజమును ఏర్పరచును?
   a) $60^0, 70^0, 80^0$
   b) $65^0, 45^0, 70^0$
   c) $40^0, 50^0, 60^0$
   d) $60^0, 30^0, 90^0$
   e) $38^0, 102^0, 40^0$
   f) $100^0, 30^0, 45^0$
2. త్రిభుజంలోని రెండు కోణముల మొత్తము 105^0 అయిన మూడవకోణం కనుగొనండి.
3. ΔPQRలో $\angle P=65^0$, $\angle Q=50^0$ అయిన $\angle R$ ను కనుగొనండి.
4. క్రింది త్రిభుజములలో మిగిలిన కోణమును కనుగొనండి.

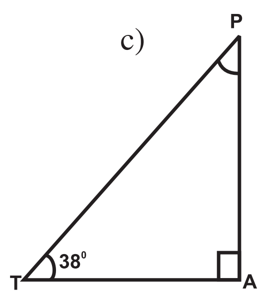
a)



b)

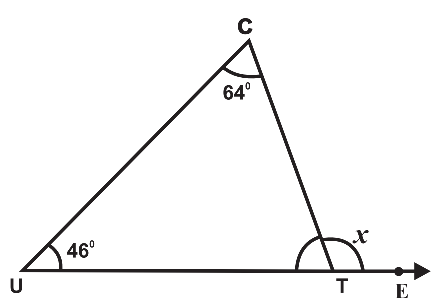


c)

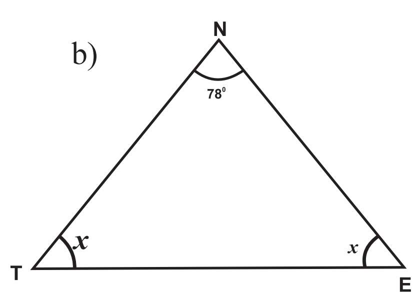


5. క్రింద ఇచ్చిన త్రిభుజములలో 'x' విలువను కనుగొనండి.

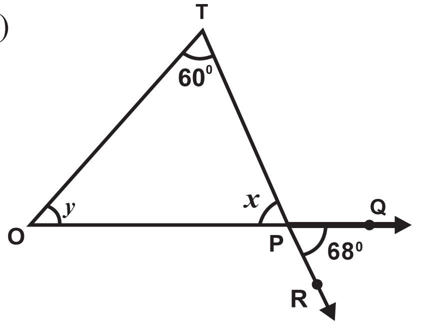
a)

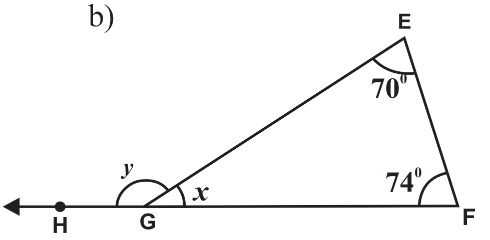


b)



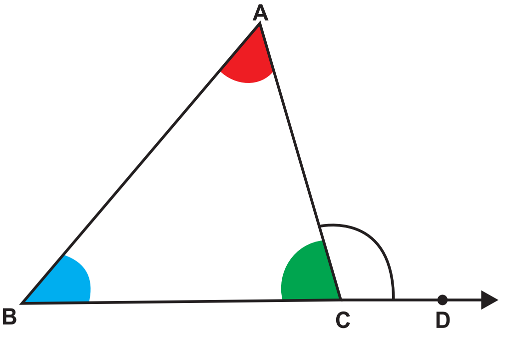
6. Find the value of 'x' and 'y' in each of the following triangles.

a) 

b) 

7. In a right angled triangle one acute angle is 37^0. Find the other acute angle.
8. If the three angles of a triangular signboard are $2x^0$, $(x-10)^0$ and $(x+30)^0$ respectively. Then find it's angles.
9. If one angle of a triangle is 80^0, find the other two angles which are equal.
10. State TRUE or FALSE for each of the following statements and give the reasons for the FALSE statement.
    i) A triangle can have two right angles.
    ii) A triangle can have two acute angles.
    iii) A triangle can have two obtuse angles.
11. The angles of a triangle are in the ratio 2 : 4 : 3, then find the angles.
12. Find the sum of interior angles of an hexagon.

5.3 Exterior Angle Property :



Draw ΔABC and extended BC upto D.

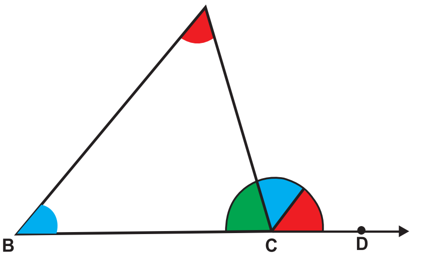
Observe the ∠ACD formed at point C. This angle lies in the exterior of ΔABC. We call it is the exterior angle of ΔABC formed at vertex C.

Clearly ∠BCA is an adjacent angle to ∠ACD. The remaining two angles of the triangle namely ∠BAC or ∠A and ∠CBA or ∠B are called the two interior opposite angles of ∠ACD.

Now cut out (or make trace copies of) ∠A and ∠B and place them adjacent to each other at 'C' as shown in the Figure.

Do these two pieces together entirely cover ∠ACD?

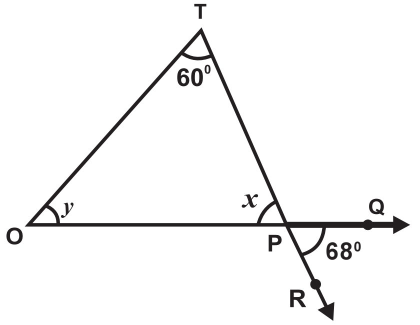
Can you say that ∠ACD = ∠A + ∠B?



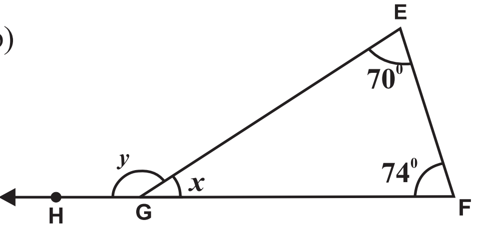
From the above activity, we can say that ***an exterior angle of a triangle is equal to the sum of its opposite interior angles.***

6. ఇచ్చిన త్రిభుజములలో 'x' మరియు 'y' విలువలు కనుగొనండి.

a)



b)



7. ఒక లంబకోణ త్రిభుజములో ఒక అల్ప కోణము 37^0 అయిన రెండవ అల్ప కోణం కనుగొనండి.

8. త్రిభుజాకారంలో ఉన్న సైన్ బోర్డు యొక్క మూడు అంతర కోణములు వరసుగా $2x^0$, $(x-10)^0$, $(x+30)^0$ అయిన ఆ కోణములు కనుగొనండి.

9. త్రిభుజం యొక్క ఒక కోణం 80^0 మరియు మిగిలిన రెండు కోణాలు సమానం అయిన వాటిని కనుగొనుము.

10. క్రింది ప్రవచనాలు సత్యమో, అసత్యమో వ్రాసి అసత్య ప్రవచనాలను సకారణంగా వివరించండి.

    i) త్రిభుజము రెండు లంబ కోణములు కలిగి ఉండవచ్చు.

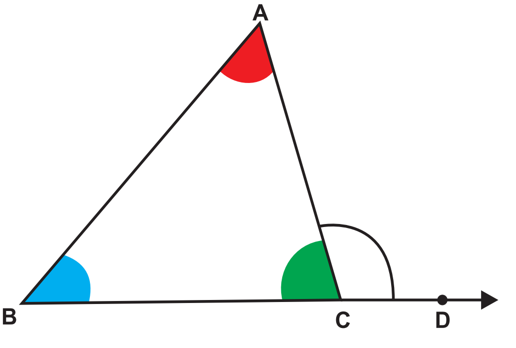
    ii) త్రిభుజము రెండు అల్ప కోణములు కలిగి ఉండవచ్చు.

    iii) త్రిభుజము రెండు అధిక కోణములు కలిగి ఉండవచ్చు.

11. త్రిభుజం యొక్క కోణములు 2:4:3 నిష్పత్తిలో ఉన్న, ఆ కోణములు కనుగొనండి .

12. షడ్భుజి యొక్క అంతర కోణాల మొత్తము కనుగొనండి.

5.3 బాహ్యకోణ ధర్మము



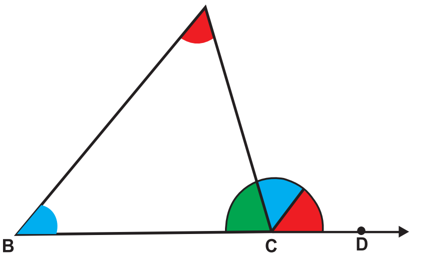
ఒక కాగితంపై ABC త్రిభుజము గీయండి BC భుజమును D వరకు పొడిగించండి.

C వద్ద ఏర్పడిన $\angle ACD$ కోణమును పరిశీలించండి.

ఈ కోణము ABC త్రిభుజమును బయటఉన్నది. దీనినే ABC త్రిభుజమునకు శీర్షము C వద్ద బాహ్యకోణము అంటారు.

$\angle BCA$, $\angle ACD$కు ఆసన్నకోణం అనేది స్పష్టం.

త్రిభుజములోని మిగిలిన రెండు కోణములు $\angle BAC$ లేదా $\angle A$ మరియు $\angle CBA$ లేదా $\angle B$లు, బాహ్యకోణము $\angle ACD$కు అంతరాభిముఖ కోణములు అంటారు.



ఇప్పుడు కోణము $\angle A$, కోణం $\angle B$లను కత్తిరించి (ట్రేస్ చేసిన ముక్కలైనా) బాహ్యకోణము $\angle ACD$పై పటములో చూపినట్లు పక్కపక్కనే అతికించండి.

ఈ రెండు కోణములు కలిసి బాహ్యకోణము $\angle ACD$కు సరిపోయినవా

$\angle ACD = \angle A + \angle B$ అని చెప్పగలరా?

పై కృత్యము నుండి **ఒక త్రిభుజంలోని బాహ్యకోణము దాని యొక్క అంతరఅభిముఖ కోణముల మొత్తమునకు సమానమని** చెప్పవచ్చు.

Proof of Exterior angle property :

We can prove this property as follows.

Statement : An exterior angle of triangle is equal to the sum of its interior opposite angles.

Given : In ΔPQR, $\angle PRS$ is an exterior angle at R, $\angle P$ and $\angle Q$ are interior opposite angles.

To prove : $\angle PRS = \angle P + \angle Q$

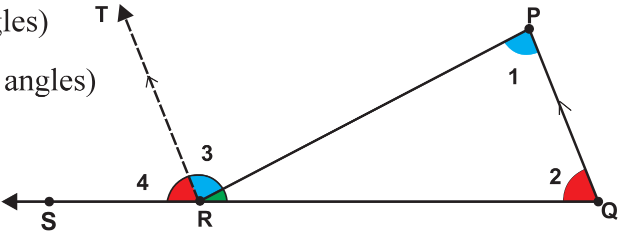
Construction: Through point 'R', Draw $\overrightarrow{RT}$ parallel to $\overline{PQ}$

Proof : $\angle 1 = \angle 3 \longrightarrow$ (i) (alternative angles)

$\angle 2 = \angle 4 \longrightarrow$ (ii) (corresponding angles)

eq. (i) + (ii) $\angle 1 + \angle 2 = \angle 3 + \angle 4$

$\angle PRS = \angle P + \angle Q$



Thus, the exterior angle of a triangle is equal to sum of it's interior opposite angles.

Example 7 : In the ΔABC, exterior angle at $\angle C = 105^0$ and $\angle A = 65^0$. Find the other interior opposite angle.

Solution : Given that, exterior angle at $\angle C = 105^0$.

One of the interior opposite angle $\angle A = 65^0$.

The other interior opposite angle is $\angle B$.

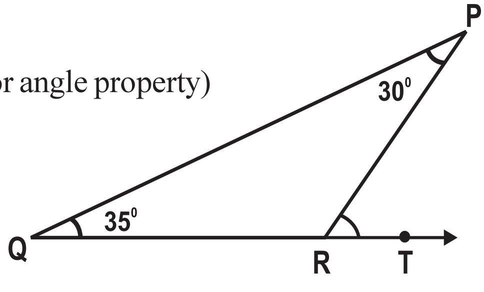
$\angle A + \angle B = 105^0$ ($\because$ exterior angle of a triangle is equal to sum of the interior opposite angles) $65^0 + \angle B = 105^0 \Rightarrow \angle B = 105^0 - 65^0 = 40^0$

Example 8 : Find the exterior angle of the given triangle.

Solution : From the figure, $\angle P = 30^0$, $\angle Q = 35^0$

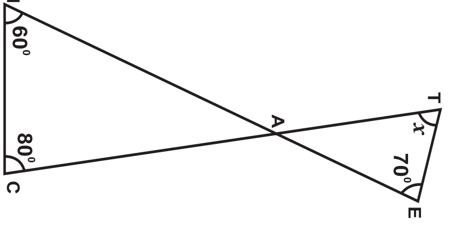
Exterior angle at R $= \angle P + \angle Q$ ($\because$ exterior angle property)

$= 30^0 + 35^0 = 65^0$



Check Your Progress

Find the value of 'x' in the given figure.



బాహ్య కోణ ధర్మము నిరూపణ :

ప్రవచనం : త్రిభుజములోని బాహ్యకోణము అంతరాభిముఖ కోణముల మొత్తమునకు సమానము.

దత్తాంశము : ΔPQR లో R వద్ద బాహ్యకోణము $\angle PRS$. $\angle P$ మరియు $\angle Q$ అనేవి వాటి అంతరాభిముఖ కోణాలు.

సారాంశము : $\angle PRS = \angle P + \angle Q$

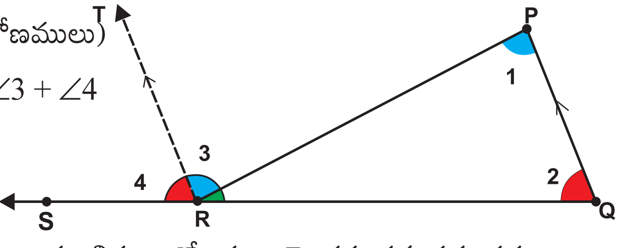
నిర్మాణము : R నుండి $\overline{PQ}$ కు సమాంతరంగా $\overrightarrow{RT}$ ను గీయండి.

$\angle 1 = \angle 3 \longrightarrow$ (i) (ఏకాంతర కోణములు)

$\angle 2 = \angle 4 \longrightarrow$ (ii) (సదృశ్య కోణములు)

(i), (ii)ల నుండి $\angle 1 + \angle 2 = \angle 3 + \angle 4$

$\therefore \angle PRS = \angle P + \angle Q$



కనుక త్రిభుజములోని బాహ్యకోణము, అంతరాభిముఖ కోణముల మొత్తమునకు సమానము.

ఉదాహరణ 7 : ΔABCలో C వద్ద బాహ్యకోణము = 105^0 మరియు $\angle A=65^0$ అయిన రెండవ అంతరాభిముఖ కోణం కనుగొనండి.

సాధన : దత్తాంశము నుండి $\angle C$ వద్ద బాహ్యకోణము = 105^0.

ఒక అంతరాభిముఖ కోణము $\angle A = 65^0$.

రెండవ అంతరాభిముఖ కోణం $\angle B$.

$\angle A + \angle B = 105^0$ ($\because$ త్రిభుజములోని బాహ్యకోణము అంతరాభిముఖ కోణముల మొత్తమునకు సమానము)

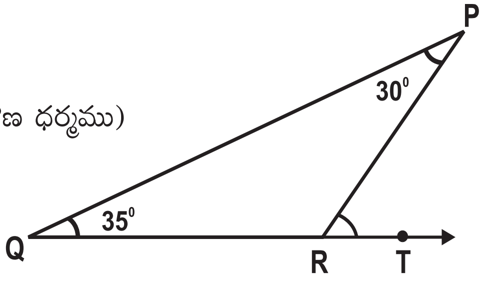
$65^0 + \angle B = 105^0 \quad \Rightarrow \angle B = 105^0 - 65^0 = 40^0$

ఉదాహరణ 8 : క్రింది త్రిభుజములో బాహ్యకోణము కనుగొనండి.

సాధన : పటము నుండి, $\angle P = 30^0, \angle Q=35^0$

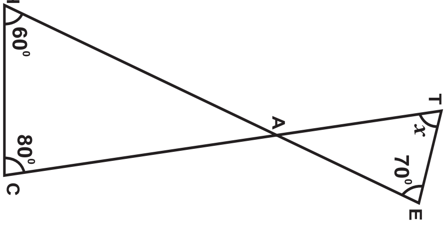
R వద్ద బాహ్యకోణము = $\angle P + \angle Q$ ($\because$ బాహ్యకోణ ధర్మము)

$= 30^0 + 35^0 = 65^0$



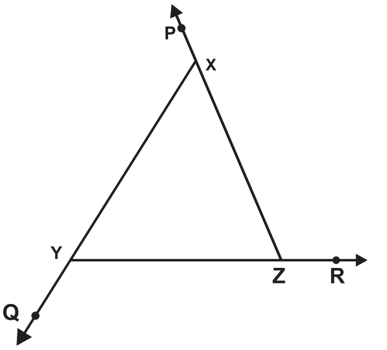
నీ ప్రగతిని తెలుసుకో

ఇచ్చిన పటంలో 'x' విలువ కనుగొనండి.



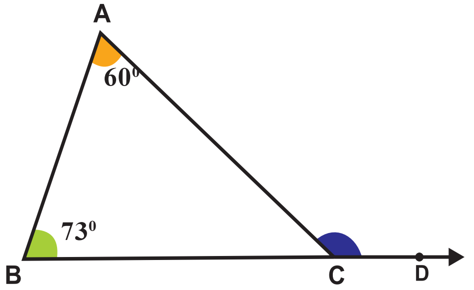
Exercise - 5.3

1. Write the exterior angles of ΔXYZ.

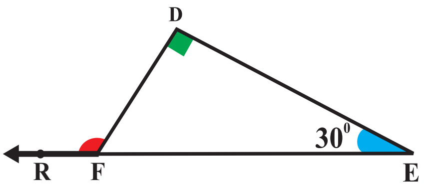


2. Find the exterior angles in each of the following triangles:

a)



b)



3. Find the value of 'x' in the following figures.

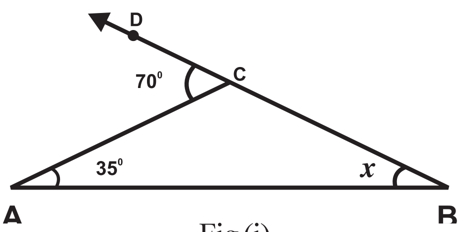


Fig (i)

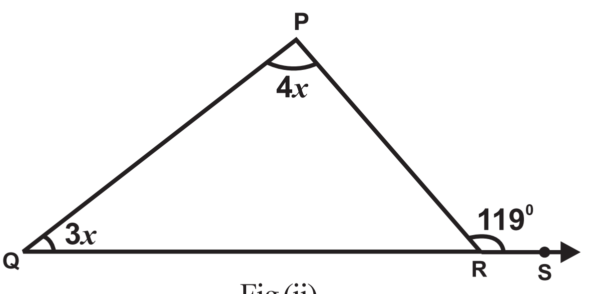


Fig (ii)

4. If the exterior angle of a triangle is 110^0 and it's interior opposite angles are x^0 and $(x + 10)^0$. Find the value of 'x'.

5. Find the values of 'x' and 'y' in each of the following figures.

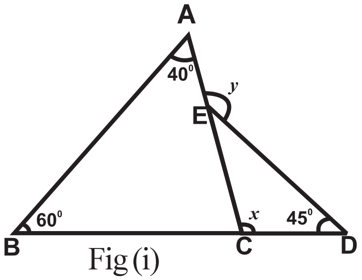


Fig (i)

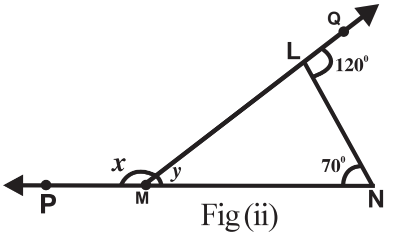
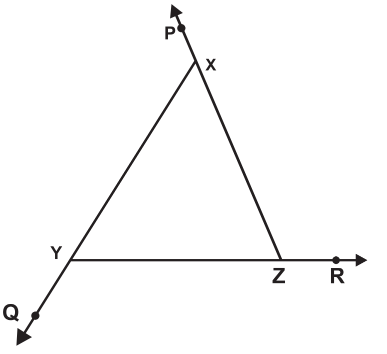


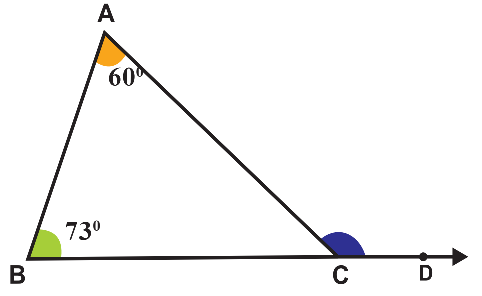
Fig (ii)

1. ΔXYZ యొక్క బాహ్యకోణాలు వ్రాయండి.

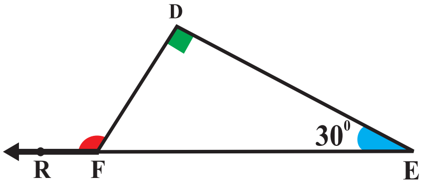


2. ఇచ్చిన త్రిభుజాలలో బాహ్యకోణాలను కనుగొనుము.

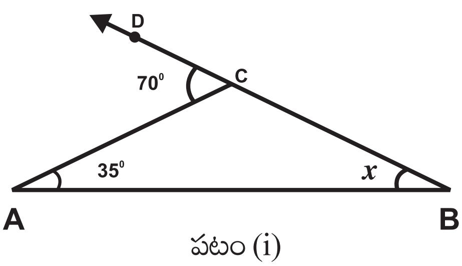
a)



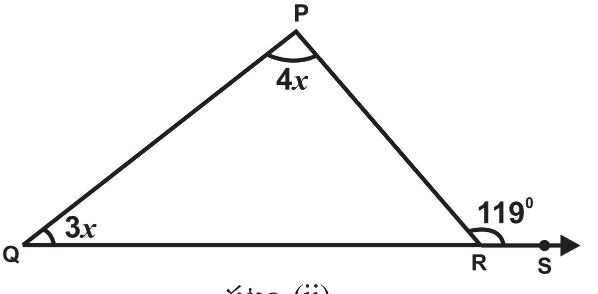
b)



3. ఇచ్చిన త్రిభుజాలలో 'x' యొక్క విలువ కనుగొనుము.



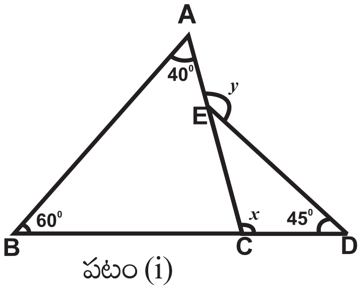
పటం (i)



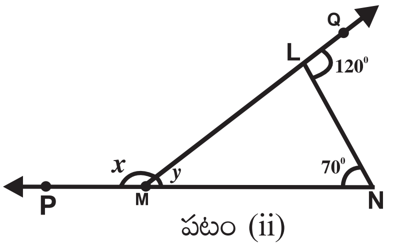
పటం (ii)

4. ఒక త్రిభుజములోని బాహ్యకోణము 110^0 మరియు అంతరాభిముఖ కోణములు x^0, $(x+10)^0$ అయిన 'x' విలువ కనుగొనండి.

5. ఇచ్చిన త్రిభుజములలో 'x' మరియు 'y' విలువలు కనుగొనండి.



పటం (i)

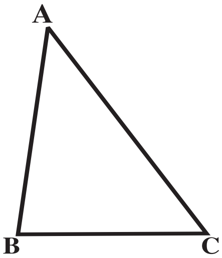


పటం (ii)

5.4 Properties of sides of a triangle :

Let's Do Activity

Measure the length of the sides of ΔABC and fill the following table.



Name of the Triangle	Length of the Sides	Sum of the lengths of two sides	Relation	True/False
ΔABC	AB =	BC + CA =	BC + CA > AB	
	BC =	CA + AB =	CA + AB > BC	
	CA =	AB + BC =	AB + BC > CA	

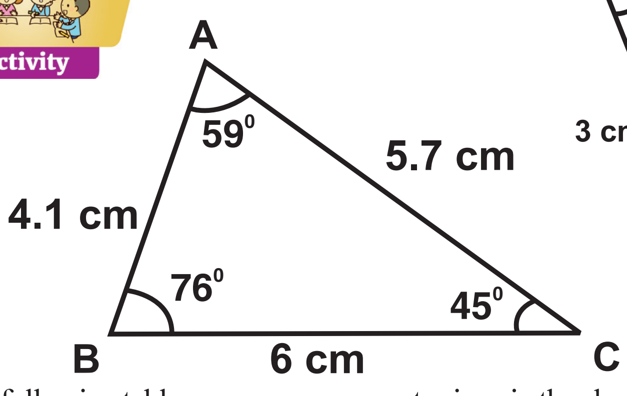
From the above table, we can conclude that **the sum of the lengths of any two sides of a triangle is *greater than* the length of the third side.**

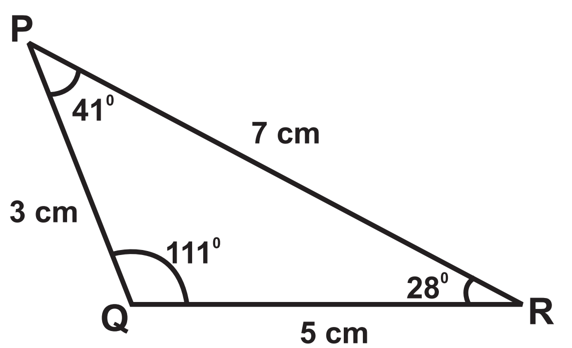
Take the same measurements of the previous activity and note the results as given below.

Name of the triangle	Length of the side	Difference of lengths	Relation	True/False
ΔABC	AB =	BC – CA =	BC – CA < AB	
	BC =	CA – AB =	CA – AB < BC	
	CA =	AB – BC =	AB – BC < CA	

From the above table we can conclude **that the difference of the lengths of any two sides of a triangle is *less than* the length of the third side.**

Let's Do Activity





Fill the following table as per measurements given in the above triangles:

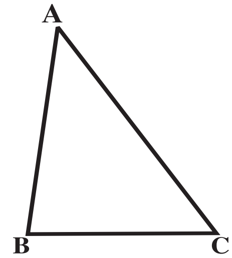
Name of the triangle	Measure of each angles	Lenth of each side	Smallest angle	Shortest side	Biggest angle	Longest side
ΔABC	∠A=__, ∠B=__, ∠C=__	AB =__, BC =__, CA =__				
ΔPQR	∠P=__, ∠Q=__, ∠R=__	PQ =__, QR =__, RP =__				

What do you observe from the last four columns in above table?

- ❖ **In any triangle the opposite side to the biggest angle is bigger than the other two sides.**
- ❖ **In any triangle the opposite side to the smallest angle is smaller than the other two sides.**

5.4 త్రిభుజము యొక్క భుజాల ధర్మాలు :

ΔABC, ΔPQR, ΔXYZ లలో ప్రతి భుజములను కొలిచి క్రింది పట్టికలో నమోదు చేయండి.



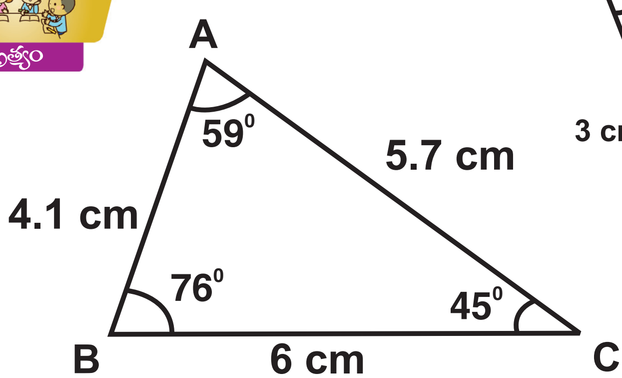
త్రిభుజము పేరు	ఒక భుజం పొడవు	రెండు భుజముల మొత్తము	సంబంధము	సత్యము/అసత్యము
ΔABC	AB =	BC + CA =	BC + CA > AB	
	BC =	CA + AB =	CA + AB > BC	
	CA =	AB + BC =	AB + BC > CA	

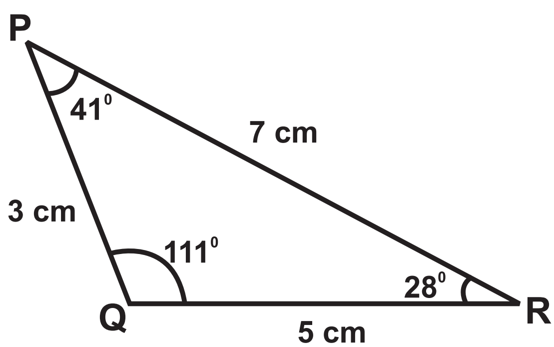
పై పట్టిక నుండి, **ఒక త్రిభుజంలోని ఏవైనా రెండు భుజముల మొత్తము, మూడవ భుజం కన్నా ఎక్కువ** అని నిర్ధారించవచ్చు.

ఇంతకు ముందు కృత్యంలో సేకరించిన అవే భుజముల కొలతలను క్రింది పట్టికలో నమోదు చేయండి.

త్రిభుజము పేరు	ఒక భుజం పొడవు	రెండు భుజముల భేధము	సంబంధము	సత్యము / అసత్యము
ΔABC	AB =	BC – CA =	BC – CA < AB	
	BC =	CA – AB =	CA – AB < BC	
	CA =	AB – BC =	AB – BC < CA	

పై పట్టిక నుండి, **ఒక త్రిభుజంలోని ఏవైనా రెండు భుజముల బేధము , మూడవ భుజం కన్నా తక్కువ** అని నిర్ధారించవచ్చు.





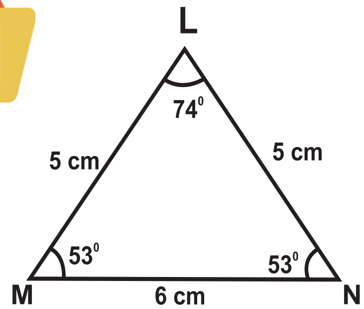
పై త్రిభుజాల కొలతలను బట్టి క్రింది పట్టికను పూరించండి.

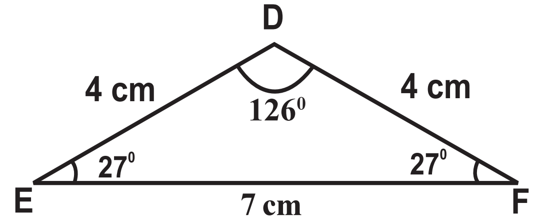
త్రిభుజము పేరు	కోణముల కొలతలు	భుజముల కొలతలు	అతి చిన్న కోణము	అతి చిన్న భుజము	అతి పెద్ద కోణము	అతి పెద్ద భుజము
ΔABC	$\angle A$=__, $\angle B$=__, $\angle C$=__	AB =__, BC =__, CA =__				
ΔPQR	$\angle P$=__, $\angle Q$=__, $\angle R$=__	PQ =__, QR =__, RP =__				

- **ఏ త్రిభుజములో అయిన అతిచిన్న కోణమునకు ఎదురుగా ఉన్న భుజము మిగిలిన రెండు భుజముల కన్నా చిన్నది.**
- **ఏ త్రిభుజములో అయిన అధిక కోణమునకు ఎదురుగా ఉన్న భుజము మిగిలిన రెండు భుజముల కన్నా పెద్దది.**

Let's Do

Activity





We can observe that 'In an Isosceles triangle, the angles which are opposite to equal sides are also equal'.

Similarly the sides which are opposite to equal angles are also equal'.

Let's think *What are the measurements of angles of an equilateral triangle?*

Example 9 : Find the values of 'x' and 'y' in the following figure.

Solution : $\angle LNM + 110^0 = 180^0$ (Linear pair angles)

$\angle LNM = 180^0 - 110^0 = 70^0$

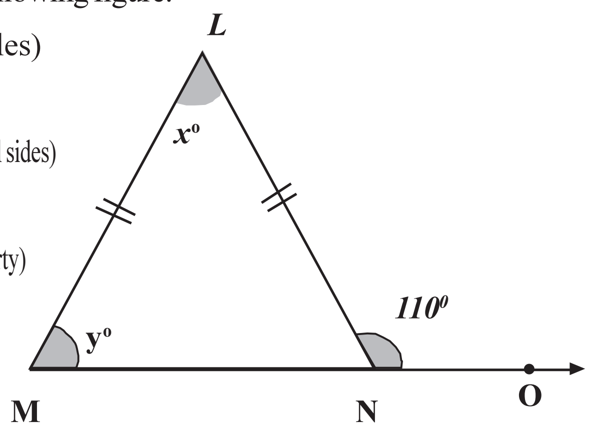
$\angle LMN = \angle LNM$ (Angles opposite to equal sides)

$y = 70^0$

$x + y = 110^0$ (Exterior angle property)

$x + 70^0 = 110^0$

$x = 110^0 - 70^0 = 40^0$



Exercise - 5.4

1. Two sides of a triangle are 5cm and 4cm respectively. Write any three possible measurements that suit for the third side.
2. The lengths of line segments are 3cm, 5cm, 6cm and 9cm.
   i) From the above measurements which group of the line segments can form a triangle.
   ii) Which group of line segments can not form a triangle, give the reason.
3. Find the value of 'x' in the following triangles:

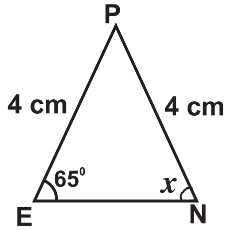


Fig. (i)

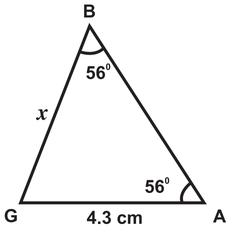
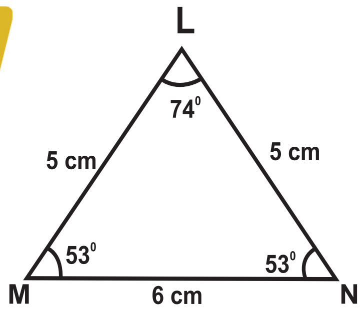
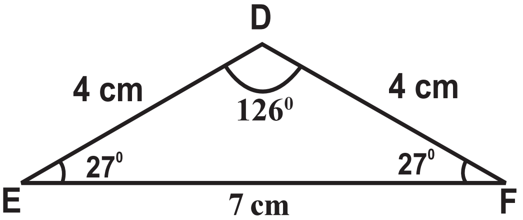


Fig. (ii)





ఒక సమద్విబాహు త్రిభుజంలో సమాన భుజములకు ఎదురుగా ఉన్న కోణములు సమానం అదేవిధంగా సమాన కోణములకు ఎదురుగా ఉన్న భుజములు సమానము అని మనం గమనించవచ్చు.

సమబాహు త్రిభుజంలో కోణాల కొలతలు కనుగొనుము?

ఉదాహరణ 9 : క్రింది పటం నుండి 'x' మరియు 'y' విలువలు కనుక్కోండి.

సాధన :

$\angle LNM + 110^0 = 180^0$ (రేఖా ఖండంపై కోణములు)

$\angle LNM = 180^0 - 110^0 = 70^0$

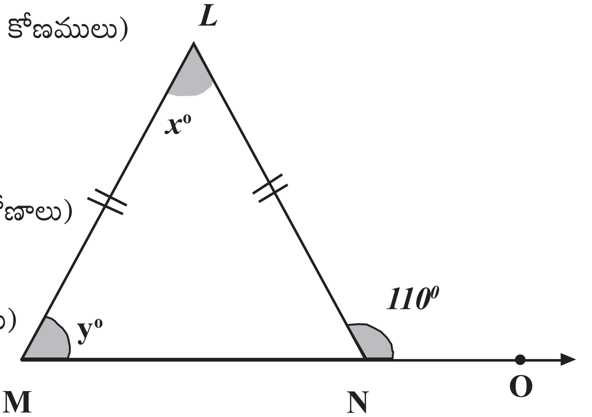
$\angle LMN = \angle LNM$ (సమాన భుజాలకు ఎదురుగా ఉండే కోణాలు)

$y = 70^0$

$x + y = 110^0$ (బాహ్యకోణ ధర్మము)

$x + 70^0 = 110^0$

$x = 110^0 - 70^0 = 40^0$



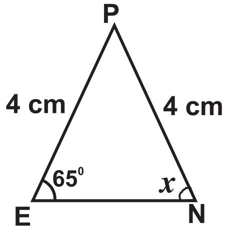
అభ్యాసం - 5.4

1. త్రిభుజములోని రెండు భుజములు 5సెం.మీ. మరియు 4 సెం.మీ. అయిన మూడవ భుజం భుజమునకు సాధ్యమయ్యే 3 కొలతలు రాయండి.

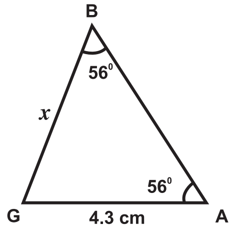
2. రేఖా ఖండముల పొడవులు 3 సెం.మీ., 5 సెం.మీ., 6 సెం.మీ. మరియు 9సెం.మీ.

   i) పై కొలతల నుండి ఏ మూడుకొలతలు త్రిభుజమును ఏర్పరచునో చెప్పండి.

   ii) ఏ కొలతలు త్రిభుజమును ఏర్పరచవు? కారణం చెప్పండి.



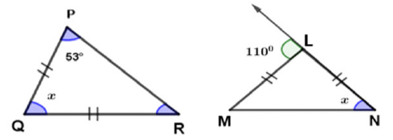
పటం (i)



పటం (ii)

4. ΔABC is an isosceles triangle in which $AB = AC$. If $\angle A = 80^0$ then find $\angle B$ and $\angle C$.

5. Find the values of 'x' in each of the beside triangles.



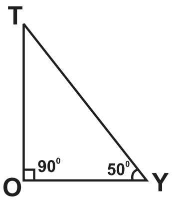
6. Which of the following statements are true in the following diagram.

   i) OY< OT

   ii) TY< TO

   iii) $\angle Y < \angle T$

   iv) TY < OY



> ***Do you Know?***
> *The perpendicular line segment from any vertex to it's opposite side is called 'Altitude.'*

5.5 Concurrent points:

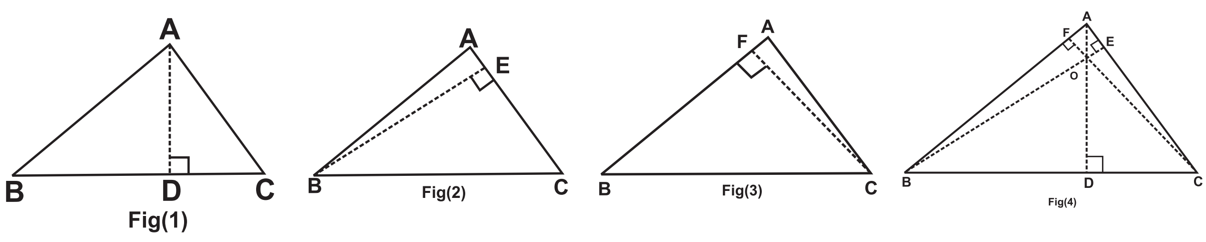
Ortho Centre:

- ❖ Make a paper cut of ΔABC, from vertex A fold the triangle on the side BC as shown in Fig. (i). This folded line represents the altitude (orthogonal) of the triangle. Name it as AD.

- ❖ In the same way you can get two other altitudes. Name them BE and CF respectively as shown in Fig. (ii) and (iii).

  You can observe that these three altitudes are orthogonals concurrent.

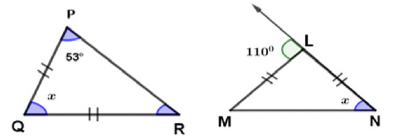
- ❖ The **concurrent point of the orthogonals of a triangle is called Orthocenter. It is denoted by 'O'.**



Note : 1. *In right angled triangle Orthocentre lies on the vertex at the right angle.*
2. *It lies on the exterior of the obtuse angled triangle.*

4. ΔABC ఒక సమద్విబాహు త్రిభుజం, $AB = AC$. $\angle A = 80^0$, అయిన $\angle B$ మరియు $\angle C$ కనుగొనండి.

5. ప్రక్కన ఇవ్వబడిన త్రిభుజాలలోని 'x' విలువలు కనుక్కోండి.



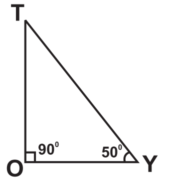
6. క్రింద ఇవ్వబడిన పటము నుండి ఈ క్రింద ఇవ్వబడిన వాక్యములు ఏవి సత్యములు?

i) $OY < OT$

ii) $TY < TO$

iii) $\angle Y < \angle T$

iv) $TY < OY$



మీకు తెలుసా?
త్రిభుజములో ఏదైనా ఒక శీర్షము నుండి దాని ఎదుటి భుజానికి గీయబడిన లంబరేఖను ఉన్నతి అంటారు.

5.5 మిళిత బిందువులు

లంబకేంద్రము

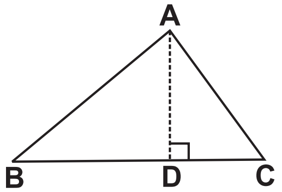
❖ కాగితంపై ΔABC త్రిభుజమును కత్తిరించుము. శీర్షం A నుండి పటం 1లో చూపినట్లు BC భుజము మడవండి.

పటములో చూపినట్లు, ఈ మడిచిన రేఖ వెంబడి గల రేఖా ఖండము త్రిభుజము యొక్క ఎత్తును సూచించును. దీనికి AD అనిపేరుపెట్టండి.

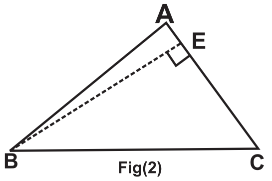
❖ అదే విధంగా మిగిలిన రెండు ఉన్నతులను పొందవచ్చు. ఈ రెండు ఉన్నతలకు పటము 2, 3లో చూపినట్లు. BE, CF అని పేరుపెట్టండి.

మూడు ఉన్నతులు మిళిత రేఖలని గమనించవచ్చు.

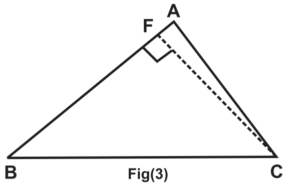
❖ **త్రిభుజంలో ఉన్నతులు మిళిత బిందువును లంబకేంద్రము అంటారు. దీనిని 'O' అక్షరంతో సూచిస్తాము.**



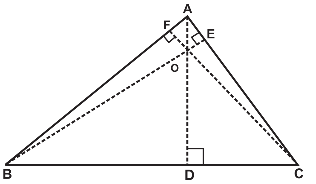
Fig(1)



Fig(2)



Fig(3)



Fig(4)

గమనిక : 1. లంబకోణ త్రిభుజంలో లంబకేంద్రము లంబకోణము కలిగియున్న శీర్షము వద్ద వుంటుంది.

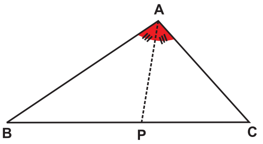
2. ఇది అధికకోణ త్రిభుజంలో బాహ్య బిందువుగా వుంటుంది.

Incentre:

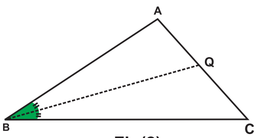
> ***Do you Know?***
> *A line which divides given angle into two equal parts is called angle bisector.*

1. Make a paper cut of ΔABC Fold the triangle as shown in Fig. (i) by coinciding the sides AB and AC. This folded line represents the angle bisector of ∠A.
2. In the same way, you can get two more angle bisectors of ∠B and ∠C respectively as shown in Fig. (ii) and (iii).

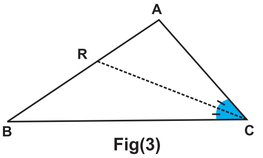
   You observe that these three angle bisectors are concurrent.
3. The concurrent point of the angle bisectors is called 'Incentre' of the triangle and it is denoted by 'I'.



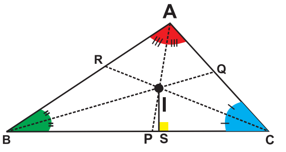
Fig(1)



Fig(2)



Fig(3)



Fig(4)

I = Incentre, IS = radius of the Incircle

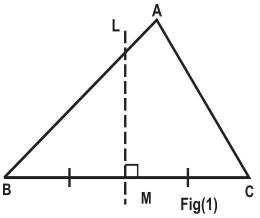
Note : *Incentre of a triangle is equidistant from all the three sides.*

Circumcentre :

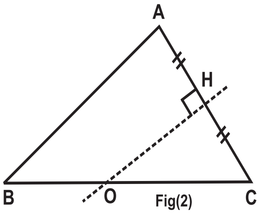
> ***Do you Know?***
> *A perpendicular line passing through mid point of any side is called perpendicular bisector.*

- Make a paper cutof ΔABC. Fold the triangle along the side, by coinciding the vertices B and C each other. The folded line represents the perpendicular bisector of side BC.
- In the same way you can get two more perpendicular bisectors to the sides AC and AB respectively.

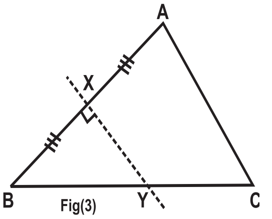
  You observe that these three perpendicular bisectors are concurrent.
- ***The concurrent point of perpendicular bisectors of a triangle is called 'Circumcentre' of that triangle. It is denoted by 'S'.***



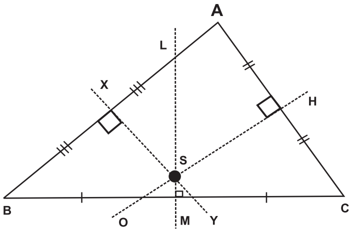
Fig(1)



Fig(2)



Fig(3)

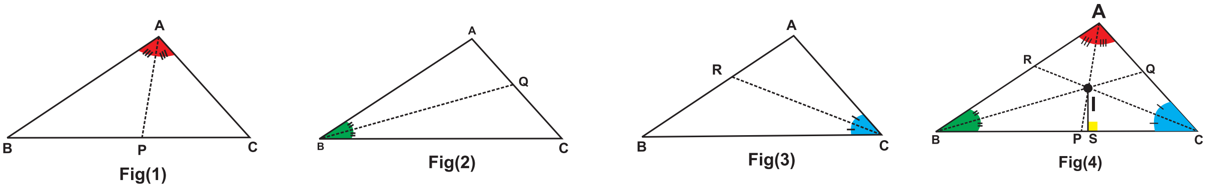


Fig(4)

అంతర్వృత్త కేంద్రము

> **మీకు తెలుసా?**
> ఇచ్చిన కోణాన్ని రెండు సమాన భాగాలుగా విభజించే రేఖను కోణ సమద్విఖండన రేఖ అంటారు.

1. కాగితంపై ΔABC త్రిభుజమును కత్తిరించుము. పటం 1లో చూపినట్లు త్రిభుజమును AB మరియు AC భుజములు ఏకీభవించునట్లుగా మడువుము. ఈ విధంగా మడిచిన రేఖ $\angle A$ కి కోణ సమద్విఖండన రేఖ అవుతుంది.
2. ఇదే విధంగా $\angle B$ మరియు $\angle C$ శీర్షముల వద్ద రెండు కోణ సమద్విఖండన రేఖలను పటము 2 మరియు 3లో చూపినట్లు గీయవచ్చు. ఈ మూడు కోణ సమద్విఖండన రేఖలు మిళితాలు అని గమనించవచ్చు.
3. మూడు కోణ సమద్విఖండన రేఖల మిళిత బిందువును అంతర్వృత్త కేంద్రము అంటారు. దీనిని I అను అక్షరంతో సూచిస్తారు.



I = అంతర్వృత్త కేంద్రము, IS = అంతర్వృత్త కేంద్ర వ్యాసార్థం

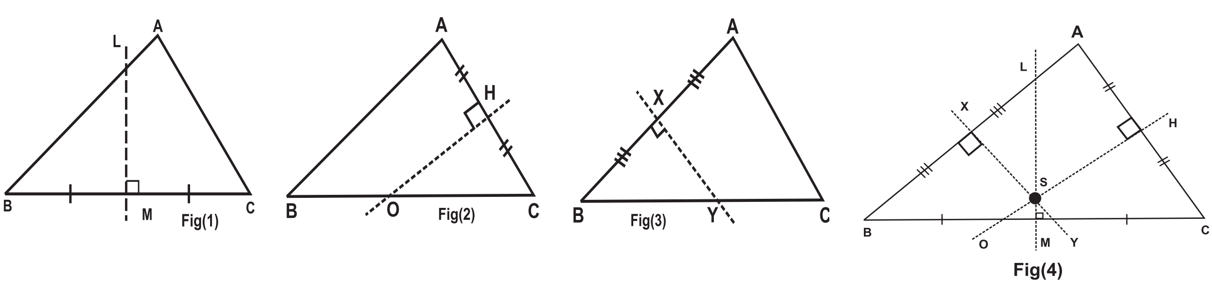
గమనిక : అంతర వృత్త కేంద్రము త్రిభుజము యొక్క మూడు భుజాలకు సమాన దూరంలో ఉంటుంది.

పరివృత్త కేంద్రము

> **మీకు తెలుసా?**
> ఏదైనా భుజము యొక్క మధ్య బిందువు గుండా పోయే లంబ రేఖను లంబ సమద్విఖండన రేఖ అంటారు.

- కాగితంపై ΔABC త్రిభుజమును కత్తిరించుము. కత్తిరించిన ఈ త్రిభుజమును B మరియు C శీర్షములు ఏకీభవించినట్లుగా మడవండి. మడత వెంబడి రేఖ లంబ సమద్విఖండన రేఖను
- అదే విధంగా పటము 2 మరియు 3లో చూపినట్లు AC మరియు AB భుజములకు లంబ సమద్విఖండన రేఖలను పొందవచ్చు.

  ఈ మూడు లంబ సమద్విఖండన రేఖలు మిళితములు అని గమనించగలవు.
- **ఒక త్రిభుజంలో లంబ సమద్విఖండన రేఖల మిళిత బిందువును పరివృత్తకేంద్రము అంటారు. దీనిని '*S*' అనే అక్షరంతో సూచిస్తారు.**



> **Note :**
> - *Circumcentre is equidistant from all three vertices of the triangle.*
> - *It lies on the midpoint of the hypotenuse in right angled triangle.*
> - *It lies on the exterior of the obtuse angled triangle.*

Centroid :

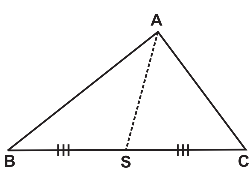
> ***Do you Know?***
>
> *A line segment joining any vertex to mid point of it's opposite side of triangle is called median*

- Make paper cut out of ΔABC, now fold triangle in such a way that the vertex B falls on vertex C. The line along which the triangle has been folded will intersect at midpoint of side BC as shown in the figure. The point of intersection is the mid-point of the side BC, name it as S. Draw a line joining vertex A to the mid-point S. This line is called the median of the triangle on BC from A.

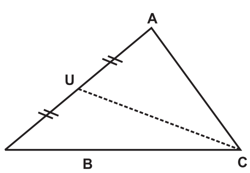
- In the same way find the mid points to AB and AC. Name the mid points as 'U' and 'T' respectively. Join UC and TB (medians).

  You observe that these three medians are concurrent.

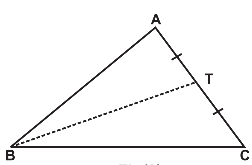
- The concurrent point of medians of a triangle is called 'Centroid' and it is denoted by 'G'.



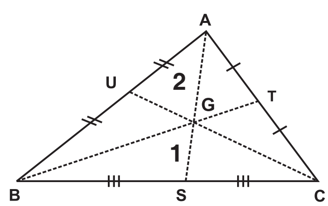
Fig(1)



Fig(2)



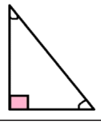
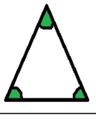
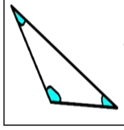
Fig(3)



Fig(4)

Note : *Centroid 'G' divides each median in the ratio of 2:1 from the vertex of a triangle.*

Write the location of the concurrent points in different triangles.

Type of triangle	Orthocentre (O)	Incentre (I)	Circumcentre (S)	Centroid (G)
 **Right angled triangle**			Mid point of the hypotenuse	
 **Acute angled triangle**		Interior		
 **Obtuse angled triangle**	Exterior			

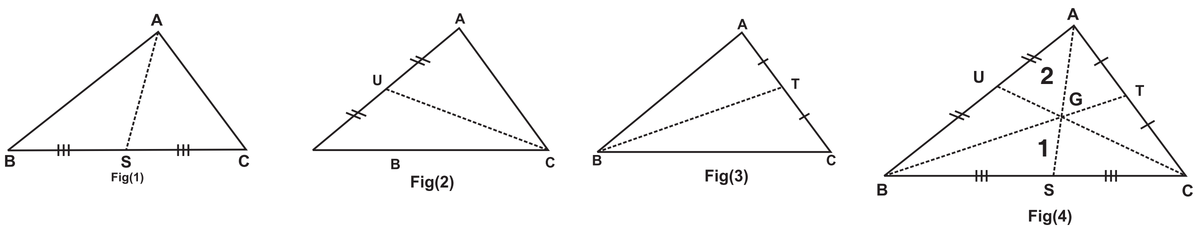
గమనిక :
- ఒక త్రిభుజంలో పరివృత్త కేంద్రము మూడు శీర్షములకు సమాన దూరంలో ఉంటుంది.
- లంబకోణ త్రిభుజంలో పరివృత్త కేంద్రము కర్ణము యొక్క మధ్య బిందువు అవుతుంది.
- అధిక కోణ త్రిభుజములో పరివృత్త కేంద్రము త్రిభుజమునకు బయట ఉంటుంది.

గురుత్వకేంద్రము :

మీకు తెలుసా?
త్రిభుజములో ఏదైనా శీర్షము నుండి దాని ఎదుట భుజము యొక్క మధ్య బిందువును కలిపే రేఖాఖండాన్ని మధ్యగత రేఖ అంటారు.

- ఒక కాగితంపై ΔABC కత్తిరించుండి. ఈ త్రిభుజమును B శీర్షము, C శీర్షములు ఏకీభవించునట్లుగా మడువుము. ఈ మడత పటం 1లో చూపినట్లు BC ని మధ్యబిందువు వద్ద ఖండించును. ఆ బిందువును S అనుకొనుము. మధ్యబిందువు S మరియు శీర్షము Aను కలుపుము. AS త్రిభుజమునకు మధ్యగతము అగును.
- ఇదే విధంగా AB మరియు AC లకు మధ్య బిందువులు గుర్తించుము. వాటిని వరుసగా U మరియు T అనుము. UC మరియు TBలను (మధ్యగతములు) కలుపుము.

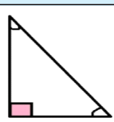
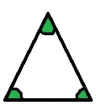
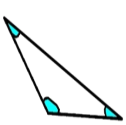
  ఈ మూడు మధ్యగత రేఖలు మిళితములు అని గమనించవచ్చు.
- ఈ మధ్యగత రేఖల మిళితబిందువును గురుత్వకేంద్రం అంటారు. దీనిని G అక్షరంతో సూచిస్తారు.



గమనిక : గురుత్వకేంద్రము 'G' ప్రతి మధ్యగత రేఖను దాని శీర్షము నుండి 2:1 నిష్పత్తిలో విభజిస్తుంది.

అన్వేషిద్దాం

వివిధ త్రిభుజాలలో మిళితబిందువుల యొక్క స్థానాన్ని వ్రాయండి.

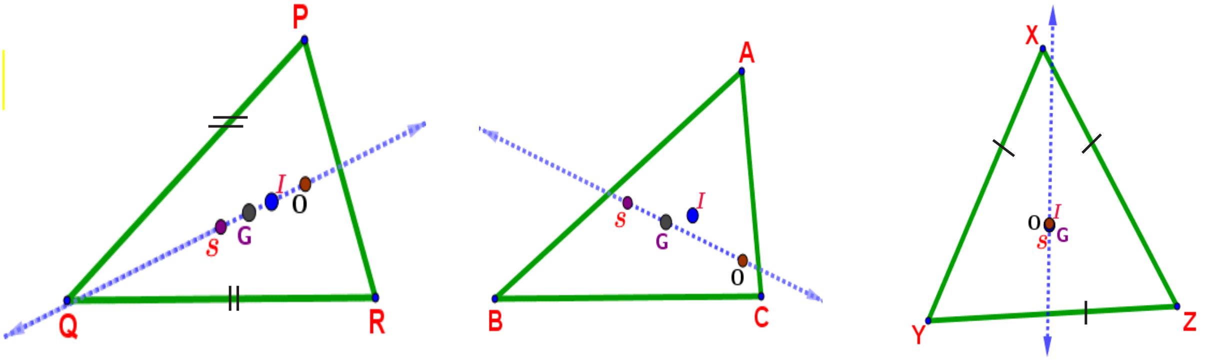
త్రిభుజ రకము	లంబ కేంద్రము (O)	అంతర వృత్త కేంద్రము (I)	పరివృత్త కేంద్రము (S)	గురుత్వకేంద్రము (G)
 లంబకోణ త్రిభుజం			కర్ణము యొక్క మధ్య బిందువు	
 అల్పకోణ త్రిభుజం		అంతరంలో		
 అధిక కోణ త్రిభుజం	బాహ్యంలో			

Let's Do Activity

Euler Line:

Draw a triangle. Draw medians, perpendicular bisectors, angle bisectors and altitudes in that triangle. Join centroid, circumcentre, incentre and orthocentre.

What do you observe?

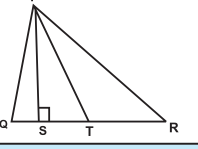


In a triangle, the centroid 'G', circumcentre 'S', incentre 'I' and orthocenter 'O' lie on a straight line (Collinear points). This line is called the 'Euler line'.

Note :
1. In Isoscles triangle 'G', 'I', 'O' and 'S' are Collinear.
2. In scalene triangle 'G', 'O' and 'S' are Collinear.
3. In Equilateral triangle 'G', 'I', 'O' and 'S' are coincide to each other.

Exercise - 5.5

1. State TRUE or FALSE. If it is FALSE write the correct statement.
   i) Centroid (G) of a triangle always lies in the interior of that triangle.
   ii) Orthocenter (O) of a right angled triangle is the mid point of it's hypotenuse.
   iii) Circumcentre (S) is equidistant from all the sides of a triangle.
   iv) The concurrence of medians of a triangle is centroid.
   v) The point of concurrence of Perpendicular bisectors of sides is Incentre.
2. In ΔPQR, $QT = TR$, $PS \perp QR$, then what do you name PT and PS.



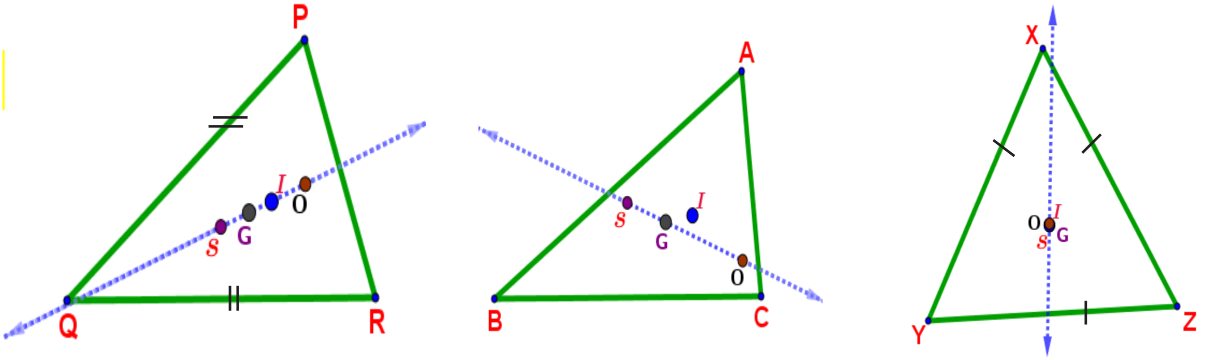
3. Fill the following table with correct answers:

Concurrent lines in triangle	Concurrent point
i) Medians	
ii) Altitudes	
iii) Angle bisectors	
iv) Perpendicular bisectors	

ఆయలర్ రేఖ :

ఒక త్రిభుజాన్ని గీయండి. త్రిభుజానికి మధ్యగత రేఖలు, లంబ సమద్విఖండన రేఖలు, కోణ సమద్విఖండన రేఖలు మరియు లంబ రేఖలు గీయండి.

మీరు ఏమి గమనించారు?

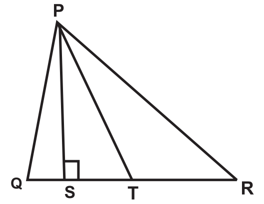


ఆయిలర్ రేఖ : త్రిభుజంలో గురుత్వకేంద్రం (G), పరివృత్త కేంద్రం (S), అంతరకేంద్రం (I) మరియు లంబ కేంద్రం(O)లు ఒకే రేఖపై ఉండును. ఆ రేఖనే ఆయిలర్ రేఖ అంటారు.

గమనిక :
1. సమద్విబాహు త్రిభుజంలో 'G', 'I', 'O' మరియు 'S' లు సరేఖీయాలు.
2. విషమబాహు త్రిభుజంలో 'G' 'O' మరియు 'S' లు సరేఖీయాలు.
3. సమబాహు త్రిభుజంలో 'G', 'I', 'O' మరియు 'S' లు ఒకే బిందువు వద్ద ఏకీభవించును.

అభ్యాసం - 5.5

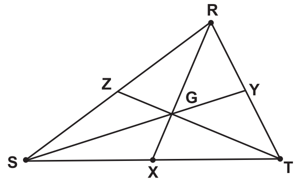
1. క్రింది వాక్యాలు సత్యమో, అసత్యమో తెలపండి. అసత్యమో అయితే సరైన వాక్యాలను రాయండి.
   i) త్రిభుజం యొక్క గురుత్వ కేంద్రం (G) ఎల్లప్పుడూ త్రిభుజం లోపలి భాగంలో ఉంటుంది.
   ii) లంబకోణ త్రిభుజం యొక్క లంబ కేంద్రం (O) దాని కర్ణం యొక్క మధ్యబిందువు.
   iii) పరివృత్త కేంద్రం (S) త్రిభుజం భుజాల నుండి సమాన దూరములో ఉంటుంది.
   iv) త్రిభుజం యొక్క మధ్యగత రేఖల మిళిత బిందువు గురుత్వకేంద్రం.
   v) భుజాల లంబసమద్విఖండన రేఖల మిళిత బిందువు అంతరకేంద్రం.
2. ΔPQR లో, $QT = TR$, $PS \perp QR$, అయిన PT మరియు PSల పేర్లు ఏమిటి?



3. క్రింది ఇచ్చిన పట్టికను సరైన జవాబులతో పూరించండి.

మిళిత రేఖలు	మిళితబిందువు
i) మధ్యగతములు	
ii) ఉన్నతులు	
iii) కోణసమద్విఖండన రేఖలు	
iv) లంబసమద్విఖండన రేఖలు	

4. In ΔABC, AD is median and G is centroid write the following ratios:
   i) AG : GD ii) AG : AD iii) AD : GD iv) GD : AG
5. In ΔRST, If RX, SY and TZ are medians of a triangle.
   If RX = 12cm, SY = 15cm then find,
   i) GX ii) RG iii) SG iv) GY

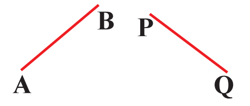
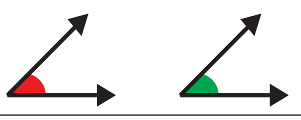
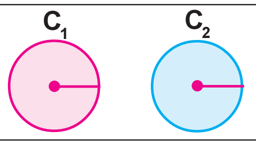
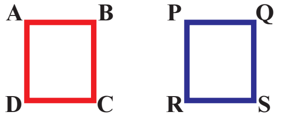


6. Which centre is equidistant from all the sides of a triangle.

5.6 Congruence of triangles:

Look at the following figures. What do you observe in them?

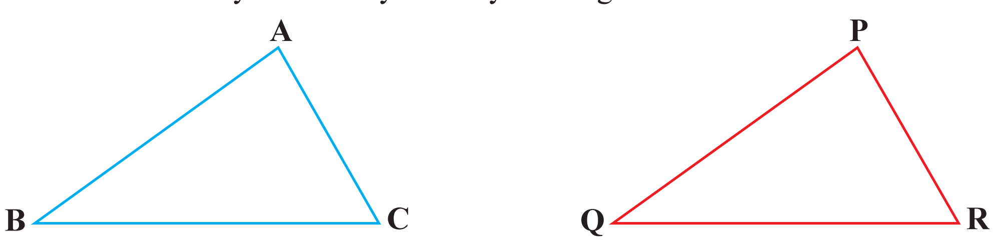
Let us observe congruence of some geometrical figures.

Name of the figure	Diagram	Rule for congruency	Symbolic representation
Line segments		**Equal in length**	$AB \cong PQ$
Angles		**Equal measure of angles**	$\angle A \cong \angle B$
Circles		**Equal radii**	$C_1 \cong C_2$
Squares		**Equal sides**	□ABCD ≅ □PQRS

What do you think of rules for congruence of triangles?

Congruence of Triangles:

We can check congruence of plane figures by method of superimposition. After superimposition if they coincide each other exactly then we say that they are congruent.



Here ΔABC and ΔPQR have the same size and the same shape. So we can represent this as

$$\Delta ABC \cong \Delta PQR$$

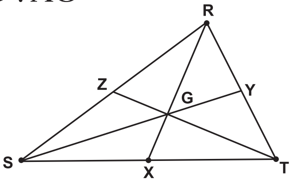
This means that, when you place ΔPQR on ΔABC, P coincide with A, Q coincide with B and R coincide with C, $\overline{PQ}$ also coincide with $\overline{AB}$, $\overline{QR}$ coincide with $\overline{BC}$ and $\overline{PR}$ coincide with $\overline{AC}$. The coinciding parts are called as corresponding parts. In two congruent triangles, the corresponding parts (i.e., angles and sides) that match each other are equal.

4. ΔABCలో AD అనేది మధ్యగతము, G గురుత్వకేంద్రం అయిన క్రింది నిష్పత్తులను రాయండి.

i) AG : GD ii) AG : AD iii) AD : GD iv) GD : AG

5. ΔRST, If RX, SY త్రిభుజం యొక్క మధ్యగతరేఖలు మరియు RX = 12 సెం.మీ., SY = 15సెం.మీ. అయిన వీటిని కనుక్కోండి.

i) GX ii) RG iii) SG iv) GY

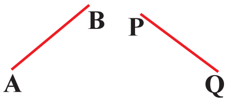
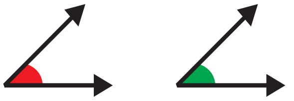
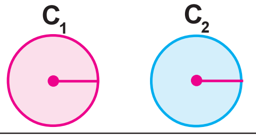
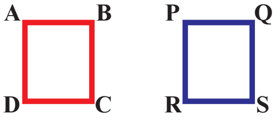


6. త్రిభుజంలో భుజాలకు సమాన దూరంలో ఉన్న మిళిత బిందువు ఏది?

5.6 త్రిభుజాల సర్వసమానత్వం :

క్రింద ఇచ్చిన పటాలను గమనించండి. వాటిలో మీరు ఏమి గమనించారు?

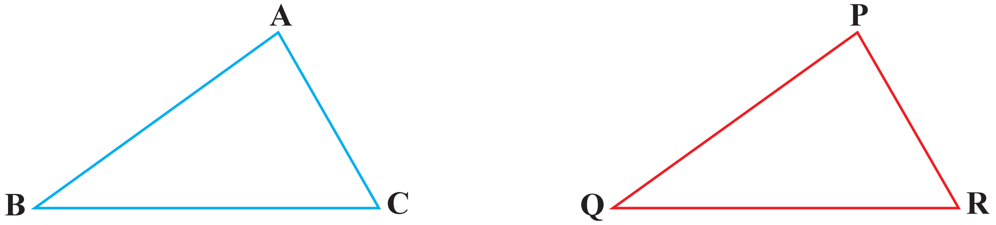
కొన్ని జ్యామితీయ పటాల సర్వసమానత్వం పరిశీలిద్దాం.

పటం పేరు	చిత్రం	సర్వసమానత్వ నియమం	సాంకేతికమైన ప్రాతినిధ్యం
రేఖా ఖండాలు		**సమాన పొడవులు**	AB ≅ PQ
కోణాలు		**సమాన కోణాలు**	∠A ≅ ∠B
వృత్తాలు		**సమాన వ్యాసార్థాలు**	$C_1 \cong C_2$
చతురస్రాలు		**సమాన భుజాలు,**	□ABCD ≅ □PQRS

త్రిభుజాల యొక్కసర్వసమానత్వ నియమాల గురించి మీరు ఏమనుకుంటున్నారు?

త్రిభుజాల యొక్క సర్వసమానత్వము:

ఆధ్యారోపణ(సూపర్ ఇంపోజిషన్) విధానం ద్వారా మనం సమతల పటాల యొక్క సర్వసమానత్వాన్ని సరిచూడవచ్చు. ఆధ్యారోపణ తరువాత అవి ఒకదానితో మరొకటి సరిగ్గా ఏకీభవిస్తే అవి సర్వసమానములు.



ఇక్కడ ΔABC మరియు ΔPQRలు ఒకే ఆకారం మరియు ఒకే పరిమాణం కలిగి ఉన్నాయి. అప్పుడు మనం దీనిని ఇలా తెలియజేస్తాం. $\Delta ABC \cong \Delta PQR$

అనగా ΔPQRను ΔABCపై ఉంచినపుడు P అనేది Aతో ఏకీభవిస్తుంది. Q అనేది Bతో ఏకీభవిస్తుంది మరియు R శీర్షం Cతో ఏకీభవిస్తుంది. $\overline{PQ}$ అనేది కూడా $\overline{AB}$ తో ఏకీభవిస్తుంది. $\overline{QR}$ అనేది $\overline{BC}$ తో ఏకీభవిస్తుంది. $\overline{PR}$ అనేది $\overline{AC}$ తో ఏకీభవిస్తుంది. ఏకీభవించే భాగాలను సదృశ భాగాలు అని అంటారు. రెండు సర్వసమానత్వము త్రిభుజాల్లో సదృశ్య భాగాలు (అంటే, కోణాలు మరియు భుజాలు) సమానం.

Statement	Corresponding vertices	Corresponding sides	Corresponding angles
$\Delta ABC \cong \Delta PQR$	$A \leftrightarrow P$ $B \leftrightarrow Q$ $C \leftrightarrow R$	$\overline{AB} = \overline{PQ}$ $\overline{BC} = \overline{QR}$ $\overline{AC} = \overline{PR}$	$\angle A = \angle P$ $\angle B = \angle Q$ $\angle C = \angle R$
$\Delta DEF \cong \Delta RTS$	$D \leftrightarrow R$ $E \leftrightarrow T$ $F \leftrightarrow S$	$\overline{DE} = \overline{RT}$ $\overline{EF} = \overline{TS}$ $\overline{DF} = \overline{RS}$	$\angle D = \angle R$ $\angle E = \angle T$ $\angle F = \angle S$

Check Your Progress

If $\Delta EFG \cong \Delta KLM$, then write the corresponding congruent sides, congruent angles and congruent vertices?

Conditions for congruence of triangles:

We know that for two triangles to be congruent, it is necessary that three corresponding sides and three corresponding angles of the two triangles must be equal. Now, we can understand that all the six conditions are not necessarily required to be verified for establishing the congruence of two triangles.

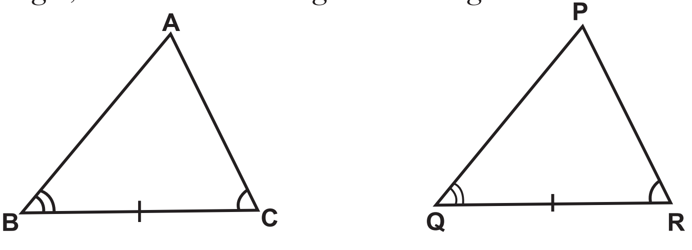
SSS (Side-Side-Side) Congruence criterion: *If three sides of a triangle are equal to the corresponding three sides of the other triangle, then the two triangles are congruent.*

Ex : In ΔABC and ΔPQR,

Corresponding sides AB = PQ,

BC = QR,

CA = RP



By SSS congruency, ΔABC and ΔPQR are congruent. $\Delta ABC \cong \Delta PQR$. It is read as triangle ABC is congruent to triangle PQR.

You can observe that the two triangles coincide each other exactly.

$$\therefore \Delta ABC \cong \Delta FED$$

SAS (Side-Angle-Side) Congruence criterion :

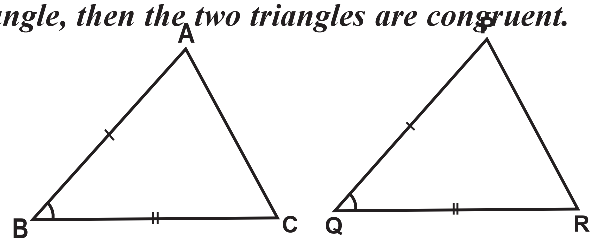
If two sides and their included angle of one triangle are equal to the corresponding two sides and their included angle of the other triangle, then the two triangles are congruent.

Ex :

In ΔABC and ΔPQR

Corresponding sides AB = PQ

BC = QR



Corresponding angles $\angle B = \angle Q$

By SAS congruency, ΔABC and ΔPQR are congruent.

$$\therefore \Delta ABC \cong \Delta PQR$$

ప్రవచనం	సదృశ్య శీర్షము	సదృశ్య శీర్షము	సదృశ్య కోణాలు
$\Delta ABC \cong \Delta PQR$	$A \leftrightarrow P$ $B \leftrightarrow Q$ $C \leftrightarrow R$	$\overline{AB} = \overline{PQ}$ $\overline{BC} = \overline{QR}$ $\overline{AC} = \overline{PR}$	$\angle A = \angle P$ $\angle B = \angle Q$ $\angle C = \angle R$
$\Delta DEF \cong \Delta RTS$	$D \leftrightarrow R$ $E \leftrightarrow T$ $F \leftrightarrow S$	$\overline{DE} = \overline{RT}$ $\overline{EF} = \overline{TS}$ $\overline{DF} = \overline{RS}$	$\angle D = \angle R$ $\angle E = \angle T$ $\angle F = \angle S$

నీ ప్రగతిని తెలుసుకో

$\Delta EFG \cong \Delta KLM$ అయితే సదృశ్య భుజాలు, సదృశ్య కోణాలు మరియు సదృశ్య శీర్షాలను రాయండి.

త్రిభుజాల సర్వ సమానత్వ నియమాలు :

రెండు త్రిభుజాల మూడు అనురూప భుజాలు మరియు మూడు అనురూప కోణాలు సమానమతే అవి సర్వసమానమని మనకు తెలుసు. కానీ త్రిభుజాలు సర్వసమానమని నిరూపించదానికి ఆరు అనురూప భాగాలు సమానం కానవసరం లేదు.

భుజం - భుజం - భుజం సర్వసమానత్వ నియమము:

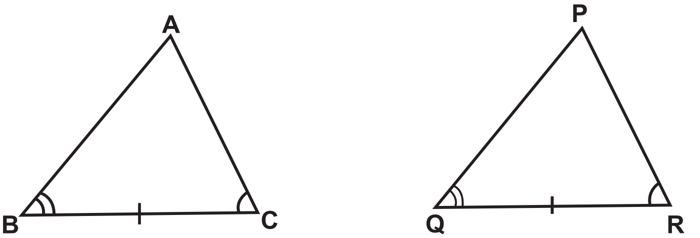
ఒక త్రిభుజంలోని మూడు భుజాలు వరుసగా రెండవ త్రిభుజములోని వాటి సదృశ భుజాలకు సమానమైతే ఆ రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానము.

ఉదాహరణ: ΔABC మరియు ΔPQR

సదృశ్య భుజాలు $AB = PQ$,

$BC = QR$,

$CA = RP$



భుజము-భుజము-భుజము సర్వసమాన నియమం నుండి ΔABC మరియు ΔPQRలు సర్వసమానాలు.

$\Delta ABC \cong \Delta PQR$

దీనిని త్రిభుజం ABC, త్రిభుజం PQRలు సర్వ సమానం అని చదువుతాం.

మీరు ఏమి గమనించారు? రెండు త్రిభుజాలు సరిగ్గా ఒకదానితో మరొకటి ఏకీభవిస్తున్నాయని మీరు గమనించవచ్చు.

$\therefore \Delta ABC \cong \Delta FED$

భుజము - కోణము - భుజము సర్వసమానత్వ నియమము :

ఒక త్రిభుజంలోని రెండు భుజాలు వాటి మధ్య కోణం వరుసగా రెండవ త్రిభుజములోని వాటి సదృశ రెండు భుజాలు, వాటి మధ్య కోణానికి సమానమైతే ఆ రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానము.

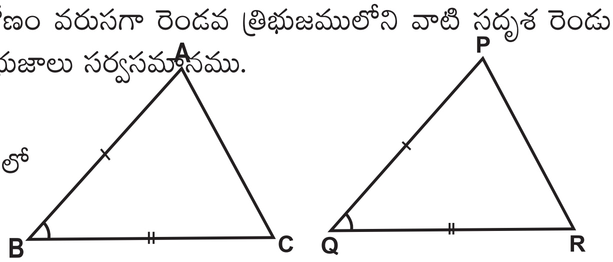
ఉదాహరణ :

ΔABC మరియు ΔPQR లలో

సదృశ్య భుజాలు: $AB = PQ$

$BC = QR$

సదృశ్య కోణాలు: $\angle B = \angle Q$



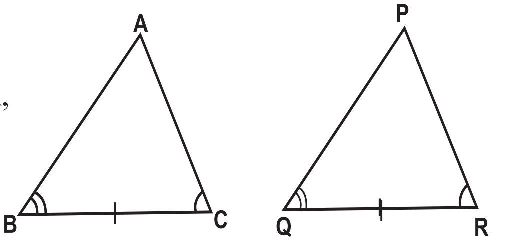
భుజము-కోణము-భుజము సర్వసమానత చేత ΔABC మరియు ΔPQRలు సర్వసమానాలు.

$\therefore \Delta ABC \cong \Delta PQR$

ASA (Angle-Side-Angle) Congruence criterion:

If two angles and their included side of one triangle is equal to the corresponding two angles and their included side of the another triangle, then the two triangles are congruent.

Ex : In ΔABC and ΔPQR



Here, corresponding angles $\angle B = \angle Q$, $\angle C = \angle R$,

Corresponding side $BC = QR$

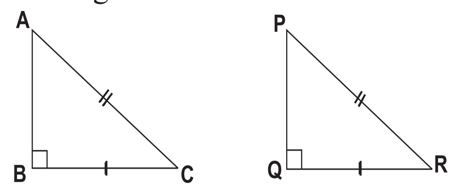
By ASA congruency, ΔABC and ΔPQR are congruent.

$$\Delta ABC \cong \Delta PQR$$

RHS (Right angle-Hypotnuse-Side) Congruence criterion :

If the hypotenuse and one side of a right angled triangle are equal to the corresponding hypotenuse and side of the other right-angled triangle, then the two triangles are congruent.

Ex : In ΔABC and ΔPQR



Corresponding sides $BC = QR$

Corresponding hypotenuses $AC = PR$

Corresponding angles $\angle B = \angle Q = 90^0$

By RHS congruency, ΔABC and ΔPQR are congruent.

$$\Delta ABC \cong \Delta PQR$$

> ***Note :*** In two triangles, if the three angles of one triangle are respectively equal to the three angles of the other, then the triangles not necessarily be congruent.

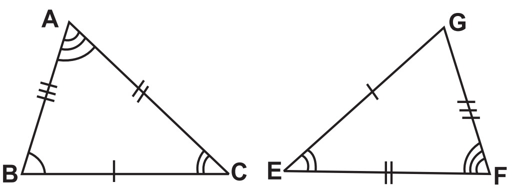
Exercise - 5.6

1. Given that $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.

   i) List out all the corresponding congruent sides.

   ii) List out all the corresponding congruent angles.

2. ΔABC and ΔFGE are congruent, determine whether the given pair of sides and angles are corresponding sides and corresponding angles or not.



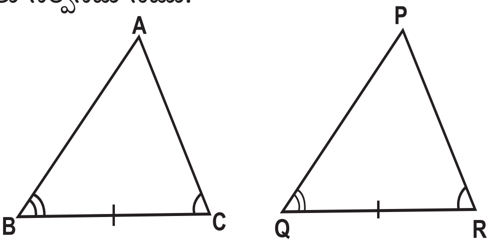
   i) $\overline{AB}$ and $\overline{FG}$ ii) $\overline{AC}$ and $\overline{GE}$

   iii) $\overline{BC}$ and $\overline{EF}$ iv) $\angle A$ and $\angle F$

   v) $\angle B$ and $\angle F$ vi) $\angle C$ and $\angle E$.

కోణము - భుజము - కోణము సర్వసమానత్వ నియమము :

ఒక త్రిభుజములోని రెండు కోణములు వాటి ఉమ్మడి భుజము వరుసగా రెండవ త్రిభుజములోని రెండు సదృశ కోణములు వాటి ఉమ్మడి భుజమునకు సమానమైతే ఆ రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానము.



ఉదాహరణ: ΔABC మరియు ΔPQRలలో

ఇక్కడ సదృశ్యకోణాలు $\angle B = \angle Q$, $\angle C = \angle R$,

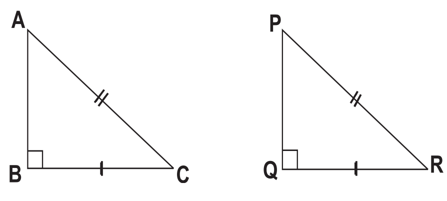
సదృశ్య భుజాలు $BC = QR$

కోణము-భుజము-కోణము సర్వసమానత నియమ ప్రకారం

ΔABC మరియు ΔPQRలు సర్వసమానాలు. $\Delta ABC \cong \Delta PQR$

లంబకోణము - కర్ణం - భుజము సర్వసమానత్వ నియమము :

ఒక లంబకోణ త్రిభుజములోని కర్ణం, ఒక భుజం వరుసగా రెండవ లంబకోణ త్రిభుజంలో కర్ణము, సదృశ్య భుజానికి సమానమైతే ఆ త్రిభుజాలు సర్వసమానము.



ఉదా: ΔABC మరియు ΔPQRలలో

సదృశ్య భుజాలు : $BC = QR$

సదృశ్య కర్ణాలు : $AC = PR$

సదృశ్య కోణాలు : $\angle B = \angle Q = 90^0$

లంబకోణము-కర్ణము-భుజము సర్వసమానత నియమం ప్రకారం ΔABC మరియు ΔPQRలు సర్వసమానాలు.

$$\Delta ABC \cong \Delta PQR$$

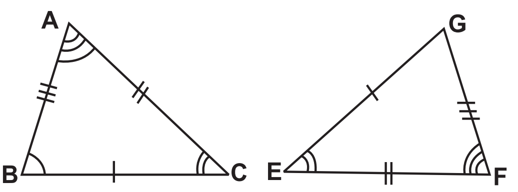
గమనిక : రెండు త్రిభుజాల్లో, ఒక త్రిభుజం యొక్క మూడు కోణాలు వరసగా మరో త్రిభుజం యొక్క మూడు కోణాలకు సమానంగా ఉన్నట్లయితే, అప్పుడు త్రిభుజాలు తప్పనిసరిగా సరూపత కలిగి ఉండవు.

అభ్యాసం - 5.6

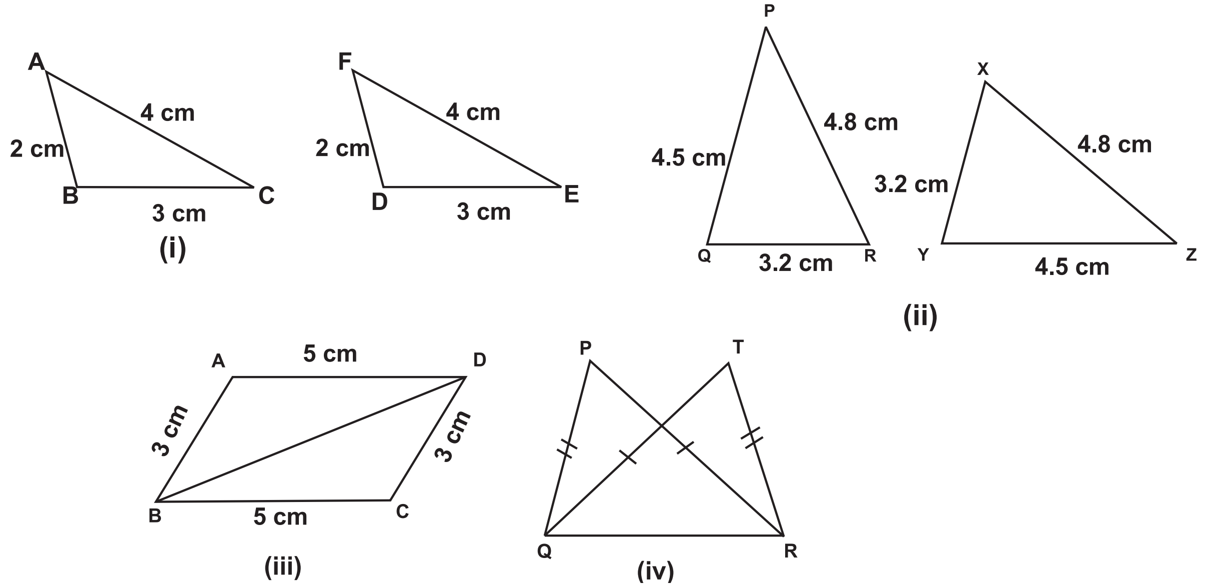
1. $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ అని ఇచ్చారు.
   i) సదృశ్య సర్వసమాన భుజములను వ్రాయండి.
   ii) సదృశ్య సర్వసమాన కోణములు వ్రాయండి.

2. ΔABC మరియు ΔFGE రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానము, అయిన ఇచ్చిన భుజముల జతలు మరియు కోణముల జతలు సదృశ్య భుజములు మరియు సదృశ్య కోణములు అవుతాయో లేదో నిర్ధారించండి.

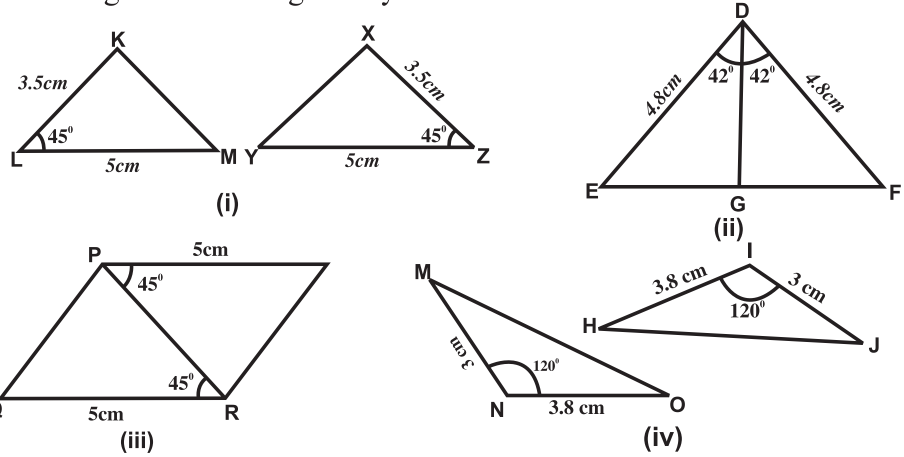
   i) $\overline{AB}$ మరియు $\overline{FG}$ ii) $\overline{AC}$ మరియు $\overline{GE}$
   iii) $\overline{BC}$ మరియు $\overline{EF}$ iv) $\angle A$ మరియు $\angle F$
   v) $\angle B$ మరియు $\angle F$ vi) $\angle C$ మరియు $\angle E$.



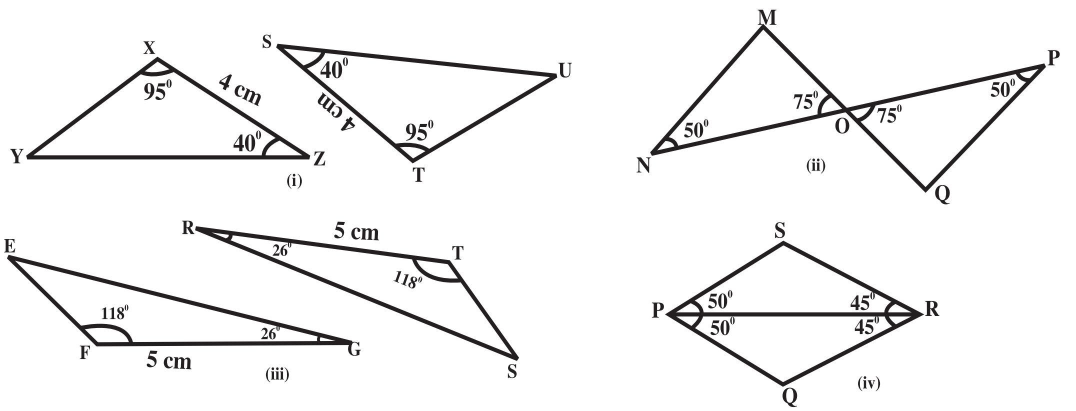
3. Find the three pairs of corresponding parts to ensure SSS congruence criterion in the given pair of triangles. Write congruence of triangles in symbolic form.



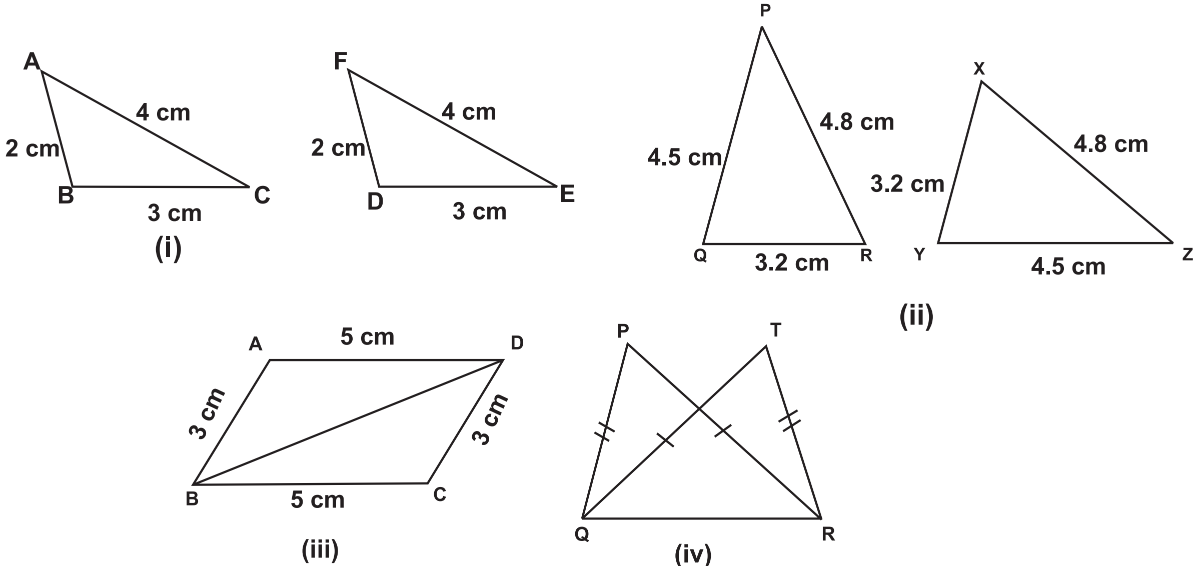
4. Find the three pairs of corresponding parts to ensure SAS congruence criterion in the given pair of triangles. Write congruence of triangles in symbolic form.



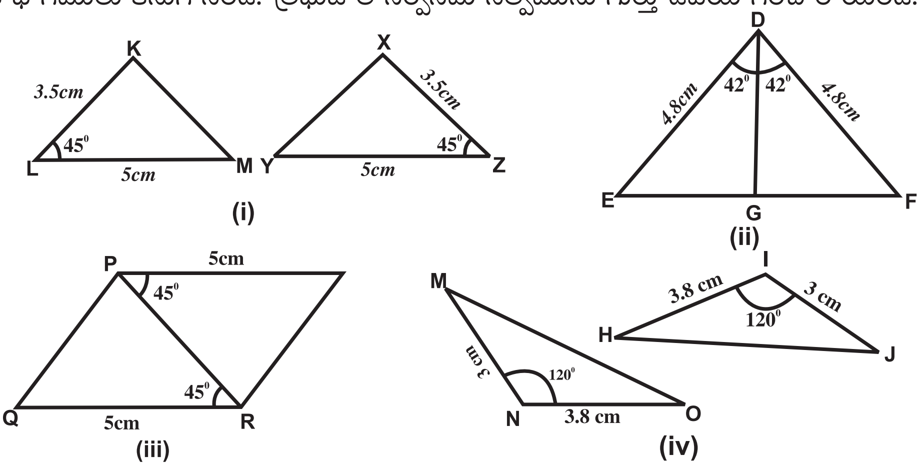
5. Find the three pairs of corresponding parts to ensure ASA congruence criterion in the given pair of triangles. Write congruence of triangles in symbolic form.



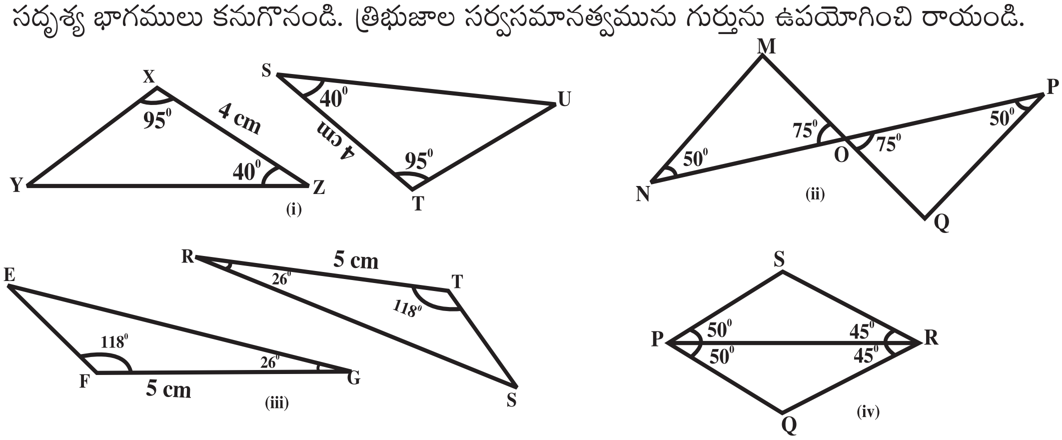
3. ఇచ్చిన త్రిభుజాల జతలకు భు.భు.భు సర్వసమానత్వం నియమము వర్తింపచేయుటకు, కావలసిన మూడు జతల సదృశ భాగములు కనుగొనండి. త్రిభుజాల సర్వసమానత్వము గుర్తును ఉపయోగించిరాయండి.



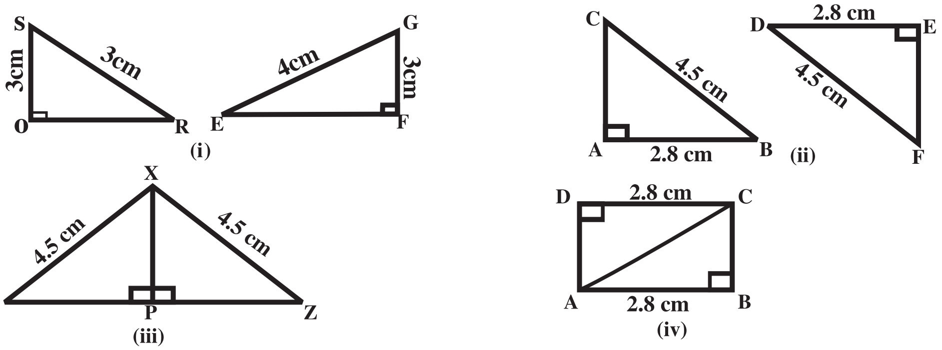
4. ఇచ్చిన త్రిభుజాల జతలకు భు.కో.భు. సర్వసమానత్వం నియమము వర్తింపచేయుటకు, కావలసిన మూడు జతల సదృశ భాగములు కనుగొనండి. త్రిభుజాల సర్వసమానత్వమును గుర్తు ఉపయోగించి రాయండి.



5. ఇచ్చిన త్రిభుజాల జతలకు కో.భు.కో సర్వసమానత్వం నియమము వర్తింపచేయుటకు, కావలసిన మూడు జతల సదృశ్య భాగములు కనుగొనండి. త్రిభుజాల సర్వసమానత్వమును గుర్తును ఉపయోగించి రాయండి.



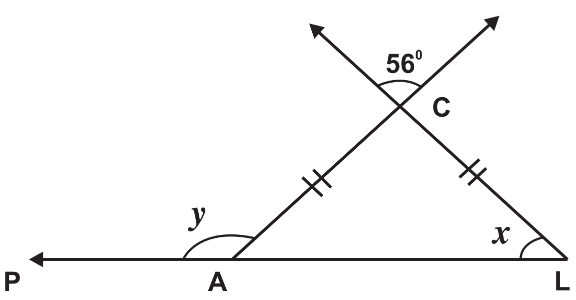
6. Find the three pairs of corresponding parts to ensure RHS congruence criterion in the given pair of triangles. Write congruence of triangles in symbolic form.



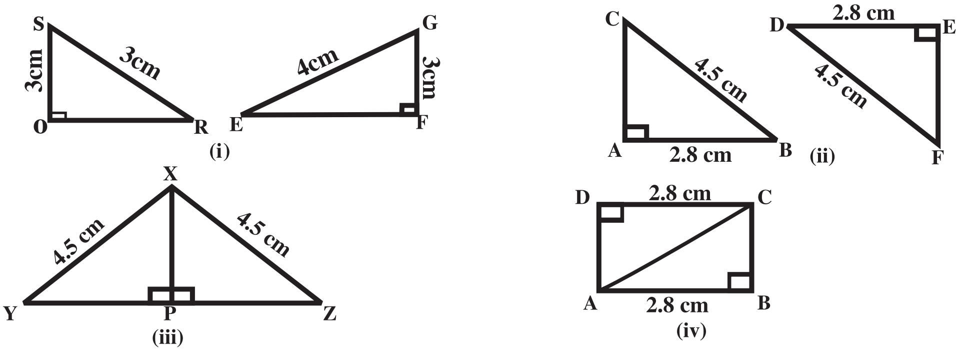
Unit Exercise

1. How many right angles exist in a triangle?
2. Which is the longest side in ΔXYZ having right angle at 'Z'?
3. Is the sum of any two angles of a triangle always greater than the third angle? Give examples to justify your answer.
4. Choose any three measures from the following to make three different triangular wooden frames.

   11m, 9m, 3m, 7m and 5m.
5. Write any two possible measurements to be suitable for the following triangles.
   i) Right angled triangle.
   ii) Obtuse angled triangle.
   iii) Acute angled Triangle.
6. What is Euler line?
7. In which ratio the centroid 'G' divides the median?
8. Which concurrent points lie outside the obtuse angled triangle?
9. What are the two concurrent points that lies on the right angled triangle?
10. Find the value of 'x' and 'y' in the adjacent figure.



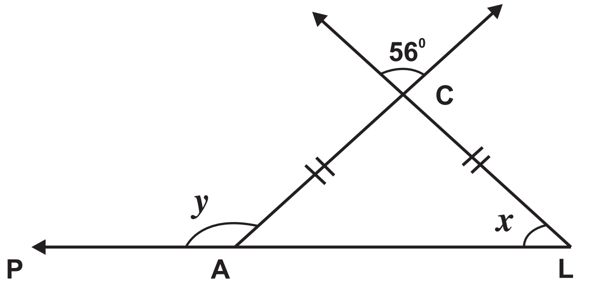
6. ఇచ్చిన త్రిభుజాల జతలకు లం.క.భు సర్వసమానత్వం నియమము వర్తింపచేయుటకు, కావలసిన మూడు జతల సదృశ్య భాగములు కనుగొనండి. త్రిభుజాల సర్వసమానత్వమును గుర్తును ఉపయోగించి రాయండి.



యూనిట్ అభ్యాసం

1. ఒక త్రిభుజంలో ఎన్ని లంబకోణాలు ఉంటాయి?
2. 'Z' వద్ద లంబకోణము గల ΔXYZ లో అతిపెద్ద భుజం ఏది?
3. త్రిభుజంలో ఏ రెండు కోణాల మొత్తం అయినా మూడవకోణం కంటే ఎక్కువగా ఉంటుందా? ఉదాహరణలతో వివరించండి.
4. దిగువ ఇచ్చిన కొలతలలో ఏవేని మూడు కొలతలను ఎన్నుకొని మూడు విభిన్న చెక్క త్రిభుజకారాలను తయారు చేయండి.

   11 సెం.మీ, 9 సెం.మీ, 3 సెం.మీ, 7 సెం.మీ మరియు 5 సెం.మీ.
5. దిగువ పేర్కొన్న త్రిభుజాలకు సరిపడు రెండు రకాలైన కొలతలను పేర్కొనండి.
   - i) లంబకోణ త్రిభుజం
   - ii) అధికకోణ త్రిభుజం
   - iii) అల్ప కోణ త్రిభుజం
6. ఆయిలర్ రేఖ అనగా నేమి?
7. మధ్యగత రేఖను గురుత్వకేంద్రం 'G' ఏ నిష్పత్తిలో విభజిస్తుంది?
8. అధికకోణ త్రిభుజంలో త్రిభుజమునకు బయట ఉండే మిళిత బిందువులు ఏవి?
9. లంబకోణ త్రిభుజంపై ఉండే రెండు మిళిత బిందువులను తెలపండి.
10. ప్రక్కపటములోని 'x' మరియు 'y' విలువలను కనుగొనుము.



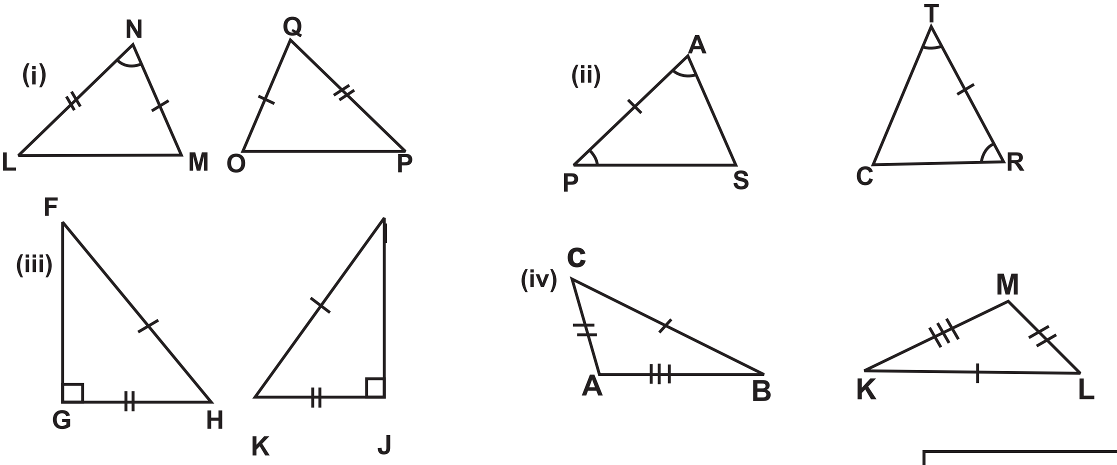
11. In ΔABC, $\angle A$ is four times to $\angle B$ and $\angle C$ is five times to $\angle B$. Find the three angles.

12. Ladder was faced to a wall. One end of the ladder was making 70^0 with the floor. Find the angle of the other end of the ladder with the wall.

13. Write the possible measurements of angles in the following table. One example is given for you.

Type of the triangle	Scalene triangle	Equilateral triangle	Isosceles triangle
Acute angled triangle	$40^0, 60^0, 80^0$		
Right angled triangle			
Obtuse angled triangle			

14. Write the congruency law in sybolic form for the following triangles.



Points to Remember

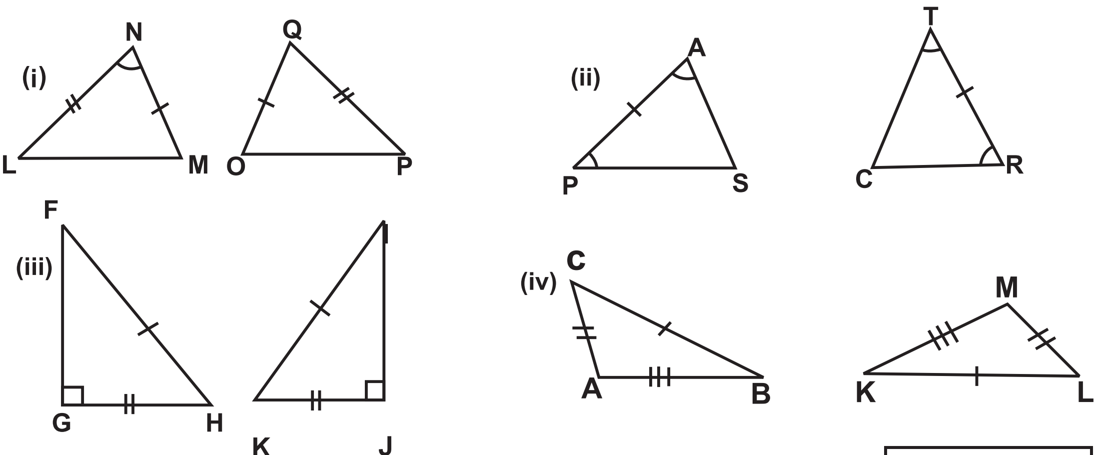
1. A triangle is a simple closed plane figure made up of three line segments.
2. Based on the sides triangles are of three types.
   - i) Equilateral triangle
   - ii) Isosceles triangle
   - iii) Scalene triangle
3. Based on the angles, triangles are of three types.
   i) Acute angled triangle ii) Obtuse angled triangle iii) Right angled triangle
4. The sum of the three interior angles in a triangle is 180^o.
5. The exterior angle of a triangle is equal to the sum of it's opposite interior angles.
6. Properties of the lengths of the sides of a triangle:
   - The sum of the lengths of any two sides of a triangle is greater than the length of the third side.
   - The difference between the lengths of any two sides of a triangle is smaller than the length of the third side.

J6S3J4

11. త్రిభుజం ΔABCలో కోణము $\angle A$, కోణము $\angle B$కు నాలుగురెట్లు మరియు కోణము $\angle C$, కోణము $\angle B$కు ఐదురెట్లు అయిన, మూడు కోణాలను కనుగొనుము.
12. గోడకు ఆనించి నిలబెట్టిన ఒక నిచ్చెన ఒక వైపు నేలతో 70 డిగ్రీలు కోణం చేయుచున్న, నిచ్చెన రెండవ వైపు గోడతో చేయు కోణం ఎంత?
13. దిగువ తెలిపిన పట్టికను సరైన కొలతలతో పూరించండి. ఒక ఉదాహరణ ఇవ్వబడింది.

	విషమ బాహు త్రిభుజం	సమద్విబాహు త్రిభుజం	సమబాహు త్రిభుజం
అల్పకోణ త్రిభుజం	$40^0, 60^0, 80^0$		
లంబకోణ త్రిభుజం			
అధిక కోణ త్రిభుజం			

14. క్రింద ఇచ్చిన త్రిభుజాల సర్వసమానత్వపు నియమను సంకేత రూపంలో రాయండి.



P6H2T9

గుర్తుంచుకోవాల్సిన అంశాలు

1. మూడు సరళ రేఖలచే ఏర్పడిన సరళ సంవృత సమతల పటమును త్రిభుజం అంటారు.
2. భుజముల ఆధారంగా, త్రిభుజములు మూడు రకములు అవి :
   i) సమబాహు త్రిభుజం
   ii) సమద్విబాహు త్రిభుజం
   iii) విషమబాహు త్రిభుజం.
3. కోణములు ఆధారంగా త్రిభుజములు మూడు రకములు అవి :
   i) అల్పకోణ త్రిభుజం ii) అధికకోణ త్రిభుజం iii) లంబకోణ త్రిభుజం.
4. త్రిభుజములో అంతర కోణముల మొత్తము 180^0.
5. ఒక త్రిభుజంలో బాహ్యకోణం దాని అంతరాభిముఖ కోణముల మొత్తమునకు సమానము.
6. త్రిభుజములో భుజముల కొలతల ధర్మాలు.
   - ఒక త్రిభుజంలో ఏవైనా రెండు భుజముల మొత్తము, మూడవ భుజం కన్నా ఎక్కువ.
   - ఒక త్రిభుజములో ఏ రెండు భుజముల భేదమైన మూడవ భుజం కన్నా తక్కువ.

7. The line segment joining a vertex of a triangle to the mid-point of its opposite side is called median of the triangle. The concurrent point of the medians of triangle is called the Centroid. Centroid 'G' divides the median in the ratio of 2:1 from the vertex.
8. The perpendicular line segment from any Vertex to its opposite side is called altitude. Concurrent point of altitudes or orthogonals of a triangle is called an Orthocentre 'O'.
9. The line segment which divides the angle into the equal parts is called angle bisector. Concurrent point of angle bisectors in a triangle is called Incentre 'I'.
10. In a triangle perpendicular by sector or concurrent on the concurrent is called circumcentre.
11. In a triangle, the Centroid 'G', Circumcentre 'S', Incentre 'I' and Orthocenter 'O' are Collinear. This line is called the Euler line.
12. Congruent objects or figures have the same shape and the same size.
13. Two congruent line segments have the same length. Two congruent angles have the same measure.
14. Superimposition method is used for enhancing of congruent plane figures.
15. For the Congruence criterion of triangles, The necessary and sufficient conditions.

    SSS congruency rule: If three sides of one triangle are equal to the corresponding three sides of the another triangle then the triangle are congruent

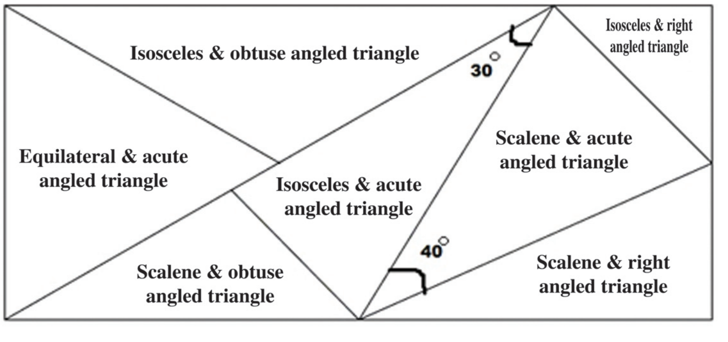
    SAS congruency rule: If two sides and their included angle of one triangle are equal to the corresponding two sides and their included angle of the other triangle, then the triangles are congruent.

    ASA congruency rule: If two angles and their included side of one triangle are equal to the corresponding two angles and their included side of the other triangle then the triangles are congruent.

    RHS congruency rule: If the hypotenuse and the side of one right-angled triangle are equal to the corresponding hypotenuse and the side of the another right-angled triangle, then the triangles are congruent.

Puzzle time

Find the interior angles of all triangles by using given clues.



7. ఒక త్రిభుజములో శీర్షము నుండి దాని ఎదుటి భుజం యొక్క మధ్య బిందువునకు కలుపుతూ గీచిన రేఖను మధ్యగతము అంటారు. ఒక త్రిభుజంలో మధ్యగతరేఖలు మిళితములు. మిళిత బిందువును గురుత్వకేంద్రము. (G) అంటారు. గురుత్వకేంద్రము మధ్యగతమును శీర్షము నుండి 2:1 నిష్పత్తి లో విభజించును.
8. శీర్షము నుండి ఎదుటిభుజముపైకి గీచిన లంబరేఖను ఎత్తు లేదా ఉన్నతి అంటారు. త్రిభుజంలో ఉన్నతుల మిళితబిందువును లంబకేంద్రము (O) అంటారు.
9. ఇచ్చిన కోణాన్ని రెండు సమాన భాగాలుగా విభజించే రేఖను కోణ సమద్వి ఖండన రేఖ అంటారు. త్రిభుజంలో కోణసమద్విఖండన రేఖలు మిళితములు. కోణసమద్వి ఖండన రేఖల మిళిత బిందువును అంతరకేంద్రము (I) అంటారు.
10. త్రిభుజములో భుజాల లంబసమద్విఖండన రేఖలు మిళితములు. ఈ మిళితబిందువును పరివృత్త కేంద్రము (S) అంటారు.
11. త్రిభుజములో గురుత్వకేంద్రము (G), అంతరకేంద్రము (I), పరివృత్త కేంద్రము(S) మరియు లంబకేంద్రము(O) సరేఖీయములు. ఈ రేఖను ఆయిలర్ రేఖ అంటారు.
12. సర్వసమాన వస్తువులు లేదా పటాలు ఒకే ఆకారం మరియు ఒకే పరిమాణం కలిగి ఉంటాయి.
13. రెండు సర్వసమాన రేఖాఖండాలు ఒకే పొడవును కలిగి ఉంటాయి. రెండు సర్వసమాన కోణాలు ఒకే కొలతను కలిగి ఉంటాయి.
14. సమతల పటాల యొక్క సర్వసమానత్వం పెంపొందించడానికి సూపర్ ఇంపోజిషన్ పద్ధతి (ఆధ్యారోపణ) ద్వారా చేయవచ్చు.
15. త్రిభుజాల యొక్క సర్వసమానత్వం.

ఆవశ్యక-పర్యాప్త నియమాలు:

భు.భు.భు.సర్వసమానత్వ నియమము: రెండు భుజాలలో ఒక త్రిభుజంలోని మూడు భుజాల కొలతలు వరుసగా రెండవ త్రిభుజములోని సదృశ్య భుజాల కొలతలకు సమానమైతే ఆ రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానము

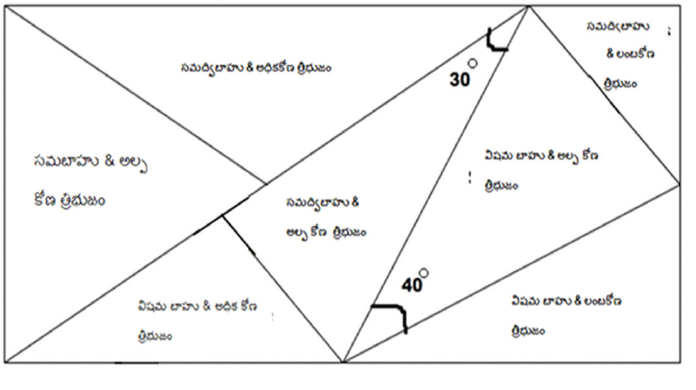
భు.కో.భు. సర్వసమానత్వనియమము: రెండు త్రిభుజాలలో ఒక త్రిభుజంలోని రెండు భుజాలు వాటి మధ్య కోణం వరుసగా రెండవ త్రిభుజములోని సదృశ్యభుజాలు వాటి మధ్యకోణంమునకు సమానమైతే ఆ త్రిభుజాలు సర్వసమానము.

కో.భు.కో.సర్వసమానత్వ నియమము : రెండుత్రిభుజాలలో, ఒక త్రిభుజములోని రెండు కోణములు వాటి ఉమ్మడి భుజము వరుసగా రెండవ త్రిభుజములోని సదృశ్యకోణములు వాటి ఉమ్మడి భుజమునకు సమానమైతే ఆ త్రిభుజాలు సర్వసమానము

లం.క.భు.సర్వసమానత్వ నియమము : రెండు లంబకోణ త్రిభుజములో, ఒక త్రిభుజములోని కర్ణం, ఒక భుజము వరుసగా రెండవ త్రిభుజంలో కర్ణం, సదృశ్య భుజానికి సమానమైతే ఆ త్రిభుజాలు సర్వసమానము.

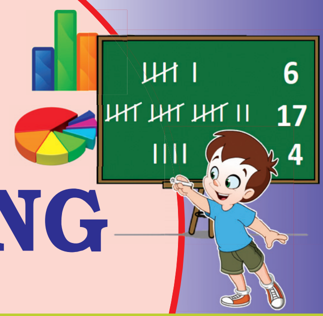
పజిల్ టైమ్

క్రింద ఇచ్చిన సూచనలను ఉపయోగించి చతురస్రాకార పటములోని త్రిభుజముల అంతరకోణములను కనుగొనండి.



Chapter

6 DATA HANDLING



Learning Outcomes

The learner is able to

- explain the concept of 'Data'.
- understand the concepts arithmetic mean, mode and median of ungrouped data and can use these concepts in daily life to solve the problems.
- construct and interprets double bar graphs.
- construct and interprets pie charts.
- represent and visualise the data in the form of graphs and pie charts.

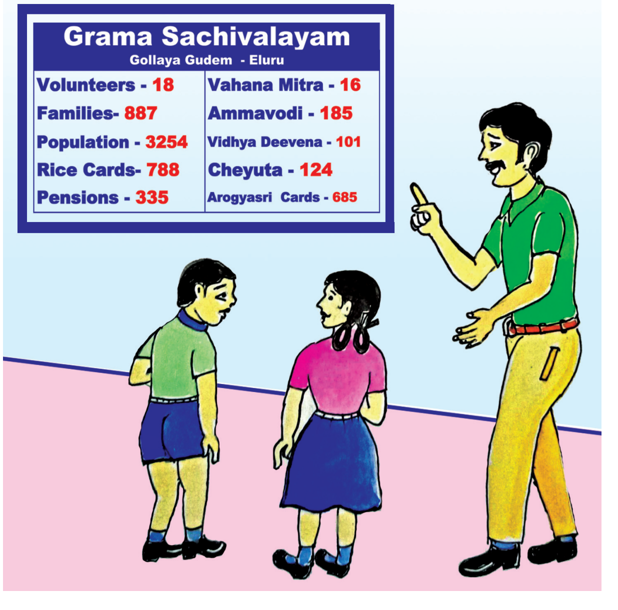
Content Items

6.0 Introduction
6.1 Arithmetic Mean
6.2 Mode
6.3 Median
6.4 Visual Representation of Data (Double bar graph and Pie chart)

I2F7E3

6.0 Introduction:

One day Kiran and Bindu visited the nearby 'GRAMA SACHIVALAYAM' along with their father.



Kiran : Dad, what are the details about, those are on the board?

Father : It is about the welfare schemes implemented by AP government and the number of beneficiaries.

Bindu : Kiran, could you tell me what is the population of our village?

Kiran : 3254 people are residing in our village.

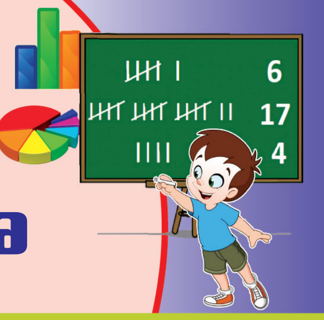
Father : Bindu, how many 'AMMAVODI' beneficiaries are there in our village?

Bindu : In our village there are 185 'AMMAVODI' beneficiaries.

The information exhibited on the board is "basic data" of the village.

Chapter 6

దత్తాంశ నిర్వహణ



అభ్యసన ఫలితాలు

అభ్యాసకులు :

- దత్తాంశ భావనను వివరించగలరు.
- అంకగణిత సగటు, బాహుళకము, మధ్యగతము అనే అవర్గీకృత దత్తాంశపు భావనలను అవగాహన చేసుకోగలడు మరియు దైనందిన జీవితంలో ఈ భావనలను ఉపయోగించి సమస్యలను సాధించగలరు.
- రెండు వరుసల కమ్మీ చిత్రాలు (డబుల్ బార్ గ్రాఫ్) గీయగలడు మరియు వ్యాఖ్యానించగలరు.
- వృత్తరేఖా చిత్రాలు (పై చిత్రాలు) గీయగలడు మరియు వ్యాఖ్యానించగలరు
- దత్తాంశమును గ్రాఫ్‌లు మరియు వృత్తరేఖా చిత్రాల రూపంలో ప్రదర్శించగలరు.

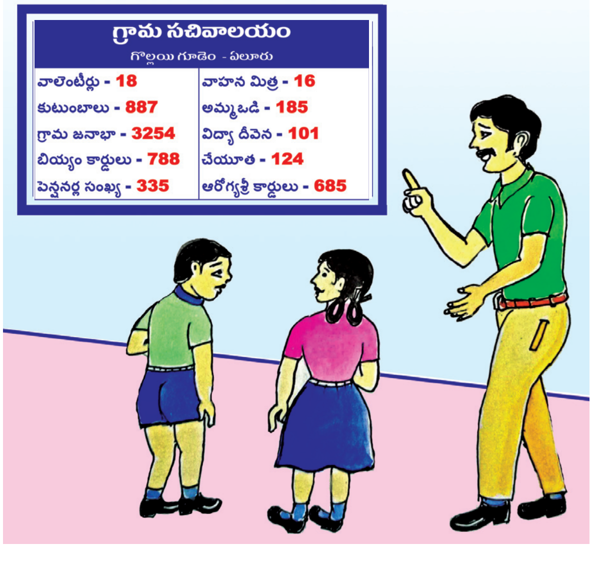
విషయాంశాలు

6.0 పరిచయం
6.1 అంకగణిత సగటు
6.2 బాహుళకము
6.3 మధ్యగతము
6.4 దత్తాంశమును దృశ్య రూపములో ప్రదర్శించుట (రెండు వరుసల కమ్మీ చిత్రం మరియు వృత్తరేఖా చిత్రం)

S5M9Z8

6.0. పరిచయం :

కిరణ్ మరియు బిందులు ఒకరోజు తమ తండ్రితో కలిసి సమీపంలోని "గ్రామ సచివాలయం" ను సందర్శించారు.



కిరణ్ : నాన్నగారు, బోర్డుపై గల వివరాలు దేనికి సంబంధించినవి?

తండ్రి : ఆంధ్రప్రదేశ్ ప్రభుత్వం అమలు చేస్తున్న సంక్షేమ పథకాలు మరియు లబ్ధిదారుల సంఖ్యకు సంబంధించిన వివరాలు కలవు.

బిందు : కిరణ్, మన గ్రామ జనాభా ఎంతో చెప్పగలవా?

కిరణ్ : మన గ్రామంలో 3,254 మంది నివసిస్తున్నారు.

తండ్రి : బిందు, మన గ్రామంలో "అమ్మ ఒడి" లబ్ధిదారులు ఎంతమంది ఉన్నారు?

బిందు : మన గ్రామంలో 185 మంది "అమ్మ ఒడి" లబ్ధిదారులు ఉన్నారు.

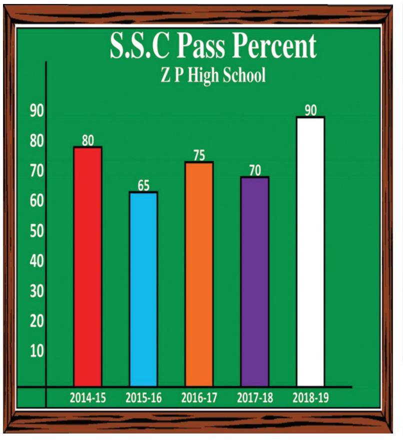
బోర్డుపై ప్రదర్శించబడ్డ సమాచారాన్ని గ్రామము యొక్క "ప్రాథమిక దత్తాంశము" అంటాము.

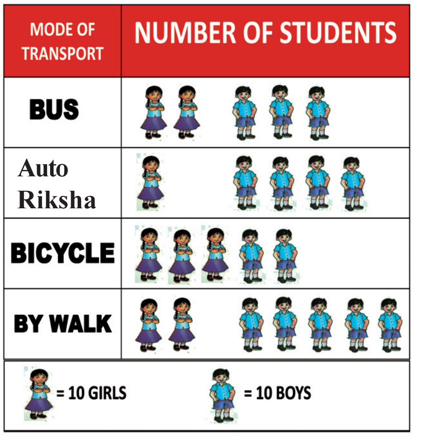
The information which collected either in the form of numbers, words or pictures is called 'Data'. Always we can see several kinds of information or data through newspapers, magazines, television and other sources of media in our daily life.

Let's observe the following charts and pictures. What are they representing?

IPL 2020 INDIAN PREMIER LEAGUE

TOP 5 BATSMEN		TOP 5 BOWLERS	
NAME OF THE PLAYER	RUNS	NAME OF THE PLAYER	WICKETS
K L RAHUL	670	K RABADA	30
SHIKHAR DHAWAN	618	JASPRITH BUMRAH	27
DAVID WARNER	548	TRENT BOULT	25
SHREYAS IYER	519	ANRICH NORTJE	22
ISHAN KISHAN	516	YUZVENDRA CHAHAL	21





The above charts and pictures are showing certain information or data, which is related to the top five batsmens and bowlers in IPL - 2020, pass percentages of school students and mode of transport of students which make us to understand easy.

Collection of data places a very important role in the statistical analysis. Data helps us to understand well and identify in which aspect we are good and in which aspect we need improvement. The method of collecting information is divided into two different types, namely '***Primary data***' and '***Secondary data***'.

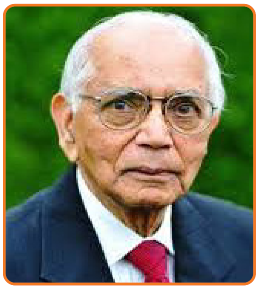
1. ***Primary data :*** The data colected directly through personal experiences, interviews, direct observations, physical testing etc. is called Primary data. It is also described as raw data or first-hand information.

   Example : Marks noted in the personal marks register of a teacher etc.

2. ***Secondary data :*** Secondary data is the information which has been collected in the past by someone else but used by the investigator for his own purpose. The sources of secondary data are books, journals, newspapers, websites etc.

   Example : Collection of village population details from census register.

Historical Note



Dr. Calyampudi Radhakrishna Rao (C.R.Rao) - India

A wellknown statistician, famous for his theory of estimations.

He worked on Cramer - Rao Inequality and Fisher - Rao theorem.

His schooling was completed in Gudur, Nuzvid, Nandigama and Visakhapatnam.

He studied M.A (Mathematics) in Andhra University.

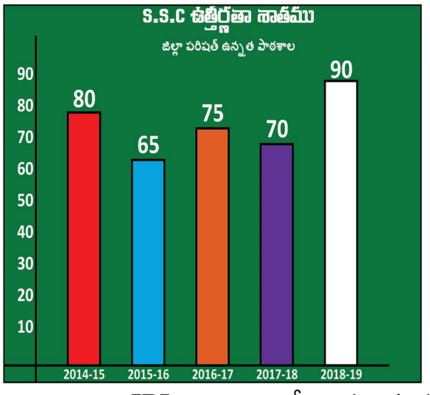
He obtained a Ph. D. Degree under the guidance of Sir R.A. Fisher.

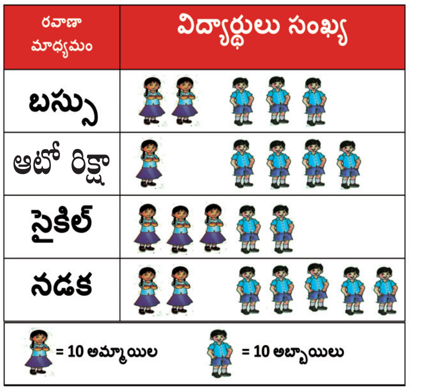
సంఖ్యలు, పదాలు లేదా చిత్రాల రూపంలో సేకరించిన సమాచారమునే "దత్తాంశము" అంటారు. మనం నిత్య జీవితంలో వార్తాపత్రికలు, మ్యాగజైన్లు, టెలివిజన్ మరియు ఇతర మీడియా వనరుల ద్వారా అనేక రకాల సమాచారములు లేదా దత్తాంశములను గమనిస్తూ ఉంటాము.

ఈ క్రింది చార్టులు మరియు చిత్రాలను పరిశీలించండి. అవి ఏమి సూచిస్తున్నాయి?

IPL 2020 ఇండియన్ ప్రీమియర్ లీగ్

5గురు ఉత్తమబ్యాట్స్‌మెన్‌లు		5గురు ఉత్తమ బౌలర్లు	
ఆటగాడి పేరు	పరుగులు	ఆటగాడి పేరు	వికెట్లు
కె.యల్. రాహుల్	670	కె. రబాడ	30
శిఖర్‌ధావన్	618	జస్ప్రిత్ బూమ్రా	27
డేవిడ్ వార్నర్	548	ట్రెంట్ బౌల్ట్	25
శ్రేయాస్ అయ్యర్	519	అన్రిచ్ నోర్ట్జె	22
ఇషాన్ కిషన్	516	యజేంద్ర చాహల్	21





పైన పేర్కొన్న చార్టులు మరియు చిత్రాలు, IPL -2020లో అత్యధిక పరుగులు చేసిన ఐదుగురు బ్యాట్స్‌మెన్లు మరియు అత్యధిక వికెట్లు తీసిన ఐదుగురు బౌలర్లు, పాఠశాల విద్యార్థుల యొక్క ఉత్తీర్ణత శాతాలు, విద్యార్థుల రవాణా మాధ్యమం మొదలైన వాటికి సంబంధించిన సమాచారము లేదా దత్తాంశమును తెలియచేస్తున్నాయి. వీటి ద్వారా ఇచ్చిన దత్తాంశము సులభముగా అర్థం చేసుకోవచ్చు.

గణాంక విశ్లేషణలో దత్తాంశ సేకరణ చాలా ముఖ్యమైన పాత్ర పోషిస్తుంది. మనకు ఏ విషయములో మెరుగ్గా ఉన్నామో మరియు ఏ విషయంలో మెరుగుదల అవసరమో గుర్తించడానికి దత్తాంశము బాగా సహాయపడుతుంది. సమాచారాన్ని సేకరించే పద్ధతిని బట్టి దత్తాంశాన్ని "**ప్రాథమిక దత్తాంశము**" మరియు "**గౌణ దత్తాంశము**" అనే రెండు రకాలుగా విభజించవచ్చు.

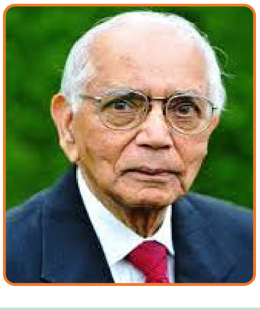
1. **ప్రాథమిక దత్తాంశము:** వ్యక్తిగత అనుభవాలు, ఇంటర్వ్యూలు, ప్రత్యక్ష పరిశీలనలు, భౌతిక పరీక్ష మొదలైన పద్ధతుల ద్వారా ప్రత్యక్షంగా సేకరించబడిన దత్తాంశమును ప్రాథమిక దత్తాంశము అంటారు. దీనిని ముడి దత్తాంశము అని కూడా అంటారు.

   ఉదాహరణ: ఉపాధ్యాయుని వ్యక్తిగత మార్కుల రిజిస్టర్ లో రాసిన మార్కుల వివరాలు.

2. **గౌణ దత్తాంశము:** గతంలో వేరొకరు సేకరించిన సమాచారాన్ని ప్రస్తుత అవసరాలకు పరిశోధకుడు ఉపయోగించుకున్న దత్తాంశంను గౌణ లేదా ద్వితీయ దత్తాంశం అని అంటారు. గౌణ దత్తాంశము యొక్క మూలాలు పుస్తకాలు, జర్నల్స్, న్యూస్ పేపర్లు, వెబ్ సైట్ లు మొదలైనవి.

   ఉదాహరణ: గ్రామ జనాభా వివరాలను జనాభా లెక్కల రిజిస్టర్ నుండి సేకరించుట.

• చారిత్రక అంశము •



Dr. కాలియంపూడి రాధాకృష్ణరావు (C.R. రావు) - భారతదేశం

ప్రముఖ సాంఖ్యక శాస్త్రజ్ఞుడు. ఈయన రచించిన "థియరీ ఆఫ్ ఎస్టిమేషన్" అనే గ్రంథము ప్రాచుర్యము పొందినది. ఈయన క్రామర్ - రావు ఇనీక్వాలిటీ మరియు ఫిషర్ - రావు సిద్ధాంతాలను రూపొందించారు.

గూడూరు, నూజివీడు, నందిగామ, విశాఖపట్నంలో ఆయన పాఠశాల విద్యను పూర్తి చేసారు. ఆంధ్రవిశ్వవిద్యాలయం నుండి గణితశాస్త్రంలో *M.A.* చేసారు. ఆయన సర్ ఆర్.ఎ.ఫిషర్ ఆధ్వర్యంలో *Ph.D* డిగ్రీ పొందారు.

Measures of Central Tendency:

We have come across several situations where we use the term '*Average*' in our day-to-day life. Consider the following statements.

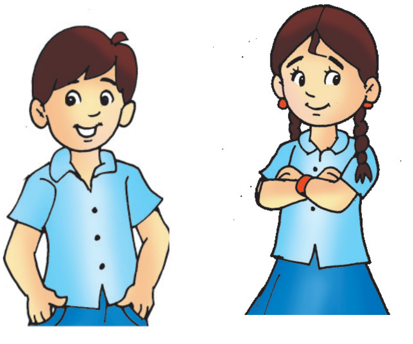
- The average marks scored by class VI students in mathematics summative test is 74.
- The average temperature at Vijayawada in the month of May is 40°C.
- Jyothika's average study time is 4 hours per day.

Children! consider the example,

'The average marks scored by class VI students in mathematics summative test is 74'. Does it mean that every student has scored 74 marks in the class? No, certainly not. Some students may got more than 74 marks and some students may got less than 74 marks. Average is the value that represents the general performance of class VI students in mathematics test. Similarly, 40°C is the representative temperature of Vijayawada in the month of May.

We can say average is a representative or Central Tendency Value of the group of data. By using a 'Central Tendency Value' we can summarize the given data. Different forms of data need different forms of representative values or Central Tendency values to describe it. We study three types of measures of Central Tendency of data namely Arithmetic Mean, Mode and Median.

6.1 Average (or) Arithmetic Mean:



Kishore : Hai Samreen, how are you studying?

Samreen : I am studying well Kishore.

Kishore : How many marks have you got in . mathematics in FA-2?

Samreen : I got 49 marks and stood first in mathematics in my class.

Kishore : Congratulations! So you are the first ranker in FA-2 exam.

Samreen : No Kishore! I got 2nd rank, after calculating of 'Average' on all subjects.

The most common Measure of Central Tendency of a group of data is average or Arithemetic Mean. To understand it in a better way, let us observe at the following case.

Suppose marks secured by two students in different subjects are

Samreen : 32, 37, 25, 49, 36, 31

Sujatha : 45, 42, 22, 34, 36, 43 then who pereformed well ?

Now Average or Arithmetic Mean of marks of Samreen and Sujatha will be calculated by

$$\frac{\textit{Total of marks in all subjects}}{\textit{Number of subjects}}$$

కేంద్రీయ స్థాన మాపనములు :

మనం దైనందిన జీవితంలో 'సగటు' అనే పదాన్ని అనేక సందర్భాలలో ఉపయోగిస్తూ ఉంటాము.

క్రింది వాక్యాలను గమనించండి.

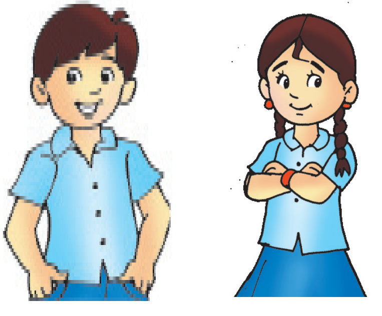
- 6వ తరగతి విద్యార్థులు సంగ్రహణాత్మక మూల్యాంకన పరీక్షలో గణితంలో సాధించిన సగటు మార్కులు 74.
- మే నెలలో విజయవాడలో సగటు ఉష్ణోగ్రత 40°C.
- జ్యోతిక సరాసరిన రోజుకు 4 గంటలు చదువుతుంది.

పిల్లలు! ఈ ఉదాహరణను పరిశీలిద్దాం.

6వ తరగతి విద్యార్థులు సంగ్రహణాత్మక మూల్యాంకన పరీక్షలో గణితంలో సాధించిన సగటు మార్కులు 74. అంటే ఆ తరగతిలో ప్రతి విద్యార్థి 74 మార్కులు సాధించినట్లా? ఖచ్చితంగా కాదు కదా, కొంతమంది విద్యార్థులకు 74 కంటే ఎక్కువ మార్కులు, కొంతమంది విద్యార్థులకు 74 కంటే తక్కువ మార్కులు వచ్చి ఉంటాయి. సగటు అనేది గణిత పరీక్షలో 6వ తరగతి విద్యార్థుల సాధారణ పనితీరుకు ప్రాతినిధ్యం వహించే విలువ. అదేవిధంగా 40°C అనేది మే నెలలో విజయవాడలో ఉష్ణోగ్రతకు ప్రాతినిధ్యం వహించే విలువ.

సగటు అనేది ఇచ్చిన దత్తాంశము యొక్క కేంద్రీయ స్థాన విలువ అని చెప్పవచ్చు. కేంద్రీయ స్థాన విలువను ఉపయోగించడం ద్వారా మనం ఇవ్వబడ్డ దత్తాంశము ను సంక్షిప్తీకరించవచ్చు. విభిన్న రూపములోని దత్తాంశములకు విభిన్న ప్రాతినిధ్య విలువలు లేదా కేంద్రీయ స్థాన విలువలు అవసరం అవుతాయి.మనం అంకగణిత సగటు, బాహుళకము, మరియు మధ్యగతము అనే మూడు విభిన్న కేంద్రీయ స్థాన మాపనముల గురించి అధ్యయనం చేద్దాం.

6.1 సరాసరి (లేదా) అంకగణిత సగటు:



కిషోర్ : హాయ్ సమ్రీన్, ఎలా చదువు తున్నావు?

సమ్రీన్ : బాగా చదువుతున్నాను కిషోర్.

కిషోర్ : FA-2లో గణిత పరీక్షలో నీకు ఎన్ని మార్కులు వచ్చాయి?

సమ్రీన్ : నేను 49 మార్కులు సాధించి, తరగతిలో గణిత సబ్జెక్టులో మొదటి స్థానంలో నిలిచాను.

కిషోర్ : అభినందనలు, కాబట్టి నీవు FA-2 పరీక్షలో మొదటి ర్యాంకర్ అన్నమాట.

సమ్రీన్ : కాదు కిషోర్, నాకు అన్ని సబ్జెక్టులపై సగటు లెక్కించిన తరువాత రెండవ ర్యాంకు వచ్చింది.

అత్యంత సాధారణంగా సరాసరి (లేదా) అంకగణిత సగటును దత్తాంశము యొక్క కేంద్రీయ స్థాన మాపనముగా ఉపయోగిస్తాము.

దీనిని సగటును మరింత మెరుగ్గా అర్థం చేసుకొనుటకు కొరకు క్రింది సందర్భాన్ని పరిశీలిద్దాం.
విభిన్న సబ్జెక్టుల్లో ఇద్దరు విద్యార్థులు సాధించిన మార్కులు క్రింద ఇవ్వబడ్డాయి.

సమ్రీన్ : 32, 37, 25, 49, 36, 31

సుజాత : 45, 42, 22, 34, 36, 43 ఎవరు మంచి ప్రతిభను కనబరిచారు?

సమ్రీన్, సుజాతల మార్కుల సరాసరి లేదా అంకగణిత సగటును క్రింది పద్ధతిలో కనుగొనవచ్చు.

$$\frac{\text{అన్ని సబ్జెక్టులలో పొందిన మార్కుల మొత్తము}}{\text{సబ్జెక్టుల సంఖ్య}}$$

$$\text{Arthmetic Mean of Samreen marks} = \frac{32+37+25+49+36+31}{6} = \frac{210}{6} = 35$$

$$\text{Arithmetic means of Sujatha marks} = \frac{45+42+22+34+36+43}{6} = \frac{222}{6} = 37$$

So, Sujatha's performance is better than Samreen.

'Arithmetic Mean'(Average) is a number or value that represents or shows the Central Tendency of a group of observations of data.

Average or Arithmetic Mean can be defind as follows:

$$\textbf{Arithmetic Mean} = \frac{\textit{Sum of observations}}{\textit{Number of observations}}$$

Example 1 : Mid Day Meal (MDM) taken by the students in six days are 132, 164, 145,182, 163 and 114. Find Arithmetic Mean of students who took MDM per day?

Solution : Given, number of students who took MDM 132, 164, 145, 182, 163, 114

$$\text{Arithmetic Mean} = \frac{\textit{Sum of observations}}{\textit{Number of observations}}$$

$$= \frac{132+164+145+182+163+114}{6} = \frac{900}{6} = 150$$

Where does the Arithmetic Mean lie? :

The marks obtained by Sarala, Bindu, Geeta and Rekha in Telugu, Hindi and English are given below.

Students	Telugu	Hindi	English
Sarala	20	16	15
Bindu	14	10	20
Geeta	16	12	18
Rekha	14	10	15

Now let us calculate the average marks obtained by the students in each subject.

	Telugu	Hindi	English
Arithmetic Mean =	$\frac{20+14+16+14}{4}$ $=\frac{64}{4}$ $= 16$	$\frac{16+10+12+10}{4}$ $=$ $=$	$\frac{15+20+18+15}{4}$ $=$ $=$
Highest marks	20		
Least marks	14		

What do you observe from the above table?
Does the mean lies between maximum and minimum values in each case?

సమ్రీన్ పొందిన మార్కుల అంకగణిత సగటు $= \frac{32+37+25+49+36+31}{6} = \frac{210}{6} = 35$

సుజాత పొందిన మార్కుల అంకగణితసగటు $= \frac{45+42+22+34+36+43}{6} = \frac{222}{6} = 37$

కాబట్టి సమ్రీన్ కంటే సుజాత మంచి ప్రతిభ కనబర్చింది అని చెప్పవచ్చు.

"అంకగణిత సగటు" (సరాసరి) అనేది ఒక సంఖ్య లేదా ఒక విలువ, అది ఇచ్చిన దత్తాంశములోని అన్ని పరిశీలన యొక్క కేంద్రీయ స్థాన విలువను సూచిస్తుంది.

సరాసరి లేదా అంకగణిత సగటును ఈ క్రింది విధముగా నిర్వచించవచ్చు.

$$\text{అంకగణిత సగటు} = \frac{\text{రాశుల మొత్తము}}{\text{రాశుల సంఖ్య}}$$

ఉదాహరణ 1 : ఒక పాఠశాలలో మధ్యాహ్న భోజన పథకములో 6 రోజులపాటు భుజించిన విద్యార్థుల సంఖ్య వరుసగా 132, 164, 145,182, 163 మరియు114 అయిన మధ్యాహ్నం భోజనం చేసిన విద్యార్థుల అంకగణిత సగటు కనుగొనుము?

సాధన: మధ్యాహ్న భోజన పథకములో 6 రోజులపాటు భుజించిన విద్యార్థుల సంఖ్య వరుసగా 132, 164, 145, 182, 163, 114

$$\text{అంకగణిత సగటు} = \frac{\text{రాశుల మొత్తము}}{\text{రాశుల సంఖ్య}}$$

$$= \frac{132+164+145+182+163+114}{6} = \frac{900}{6} = 150$$

అంక సగటు ఏ విలువల మధ్య ఉంటుంది?

తెలుగు, హిందీ, ఇంగ్లీష్ సబ్జెక్టులలో సరళ, బిందు, గీత మరియు రేఖ లు పొందిన మార్కుల వివరాలు క్రింద ఇవ్వ బడ్డాయి.

విద్యార్థులు	తెలుగు	హిందీ	ఇంగ్లీష్
సరళ	20	16	15
బిందు	14	10	20
గీత	16	12	18
రేఖ	14	10	15

ప్రతీ సబ్జెక్ట్‌లో విద్యార్థులు పొందిన సరాసరి మార్కులు గణన చేద్దాం.

	తెలుగు	హిందీ	ఇంగ్లీష్
అంకగణిత సగటు =	$\frac{20+14+16+14}{4}$ $= \frac{64}{4}$ $= 16$	$\frac{16+10+12+10}{4}$ = =	$\frac{15+20+18+15}{4}$ = =
అత్యధిక మార్కులు	20		
అత్యల్ప మార్కులు	14		

పై పట్టిక నుండి, నీవు ఏమి గమనించావు?

అన్ని సందర్భములలో అంకగణిత సగటు అత్యల్ప మరియు అత్యధిక పరిశీలనా విలువల మధ్య ఉన్నదా?

Note: 'Arithmetic Mean' of given data always lies between the highest and lowest observations of the data.

Check Your Progress

Find the Arithmetic Mean of first three multiples of 5?

Let's Explore

Collect the information about the weights of any ten students of your class in kilograms and answer the following :

1. What are the greatest and smallest weights?
2. Find Arithmetic mean of collected data.
3. Verify whether Arithmetic Mean lies between greatest and smallest observations or not .

Exercise - 6.1

1. Find Arithmetic Mean of the following .

   i) 4, 5, 11, 8 ii) 10, 15, 21, 12, 17 iii) $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{2}, \frac{5}{4}$

2. Amounts donated by eight students to 'NIVAR' cyclone effected people are ₹300, ₹450, ₹700, ₹650, ₹400, ₹750, ₹900 and ₹850. Find the Arithmetic Mean of amounts donated.
3. The number of passengers who travelled in APSRTC bus from Eluru to Rangapuram in 5 trips in a day are 35, 42, 28, 41 and 44. What is the average of number of passengers travelled per trip?

4. Find Arithmetic mean of factors of 24.
5. Find the Arithmetic Mean of x, $x + 1$ and $x + 2$.

Range of the data

The difference between maximum and minimum values of data is its 'Range'.

Example : If the observations of data are 15, 22, 9, 45, 54 and 36 then

Range = Maximum value – Minimum value

= 54 – 9 = 45

Check Your Progress

What is the range of first ten whole numbers?

గమనిక: అంకగణిత సగటు ఎల్లప్పుడూ అత్యల్ప మరియు అత్యధిక పరిశీలనా విలువల మధ్య ఉంటుంది.

నీ ప్రగతిని తెలుసుకో

5 యొక్క మొదటి మూడు గుణిజాల అంక గణిత సగటు కనుగొనుము?

అన్వేషిద్దాం

తరగతిలోని 10 మంది విద్యార్థుల బరువులను (కిలోగ్రాములలో) సేకరించండి క్రింది ప్రశ్నలకు సమాధానాలు రాయండి.

1. అత్యధిక మరియు అత్యల్ప బరువులు ఏవి ?
2. సేకరించిన దత్తాంశమునకు అంకగణిత సగటు కనుగొనుము.
3. అంకగణిత సగటు, అత్యధిక మరియు అత్యల్ప పరిశీలనా విలువల మధ్య ఉన్నదా లేదో గమనించండి.

అభ్యాసం - 6.1

1. క్రింది దత్తాంశముల అంకగణిత సగటు కనుగొనుము.

   i) 4, 5, 11, 8 ii) 10, 15, 21, 12, 17 iii) $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{2}, \frac{5}{4}$

2. 'నీవర్' తుఫాను బాధితులకు 8 మంది విదార్థులు ₹300, ₹450, ₹700, ₹650, ₹400, ₹750, ₹900 మరియు ₹850లు ధన సహాయం చేసారు. అయిన విద్యార్థులు సహాయం చేసిన సగటు ధనం ఎంత?
3. APSRTC బస్సులో ఏలూరు నుండి రంగాపురంనకు ఒక రోజులో ఐదు సార్లు ప్రయాణించిన ప్రయాణికుల సంఖ్య 35, 42, 28, 41 మరియు 44. అయిన ఆ బస్సులో, ట్రిప్పుకు ప్రయాణించిన సగటు ప్రయాణికుల సంఖ్య ఎంత?

4. 24 యొక్క కారణాంకముల అంకగణిత సగటు కనుగొనుము.
5. $x, x+1, x+2$ ల అంకగణిత సగటు కనుగొనుము.

దత్తాంశము యొక్క వ్యాప్తి

ఇచ్చిన దత్తాంశములోని గరిష్ట మరియు కనిష్ట విలువల మధ్య భేదాన్నే 'వ్యాప్తి' అంటారు.

ఉదాహరణ : దత్తాంశలోని రాశులు 15, 22, 9, 45, 54, 36 అయిన

వ్యాప్తి = గరిష్ట విలువ – కనిష్ట విలువ

= 54 – 9 = 45

నీ ప్రగతిని తెలుసుకో

మొదటి 10 పూర్ణాంకముల వ్యాప్తి కనుగొనుము.

6.2 Mode :

We have discussed earlier that the arithmetic mean is one of the Measures of Central Tendency. Depending upon the data and its purpose, other measures of Central Tendency may be used.

Following table represents sale details of different sizes of footwear in a shop for a week.

Size of the footwear (inches)	4"	5"	6"	7"	8"	9"	10"
Number of footwear sets sold	22	30	16	70	32	23	10

Then which size footwear should the shopkeeper has to replenish in his stock at the end of the week.

Suppose we find the Arithmetic Mean of the footwear sold.

$$\text{Arithmetic Mean} = \frac{\textit{Sum of observations}}{\textit{Number of observations}}$$

$$= \frac{22+30+16+70+32+23+10}{7} = \frac{203}{7} = 29$$

Average number of footwear sold is 29. This means that the shopkeeper has to get 29 pairs of footwear in each size. Will it be wise to decide like this? (Why)?

It has to be observed that the maximum purchase falls on the footwear of size 7 inches. So the shopkeeper has to get more number of footwear of size 7 inches. Hence arithmetic mean does not suit for this purpose.

Here we need another type of measure of central tendency called 'Mode'.

The observation which occurs most frequently in the given data is called 'Mode' of the data.

Note : In general, Mode is used to find the representative value of '*verbal data*'.

a) To know the most preferred flavour of ice-cream to children.

b) To know the most popular toy liked by the kids by a toy factory.

Example 2: Ages of students (in years) are 8, 5, 6, 6, 5, 7, 5, 6, 5, 4, 7, 6, 7, 6, 5, 8 and 6 find the mode of given data?

Solution : Given, ages of students are 8, 5, 6, 6, 5, 7, 5, 6, 5, 4, 7, 6, 7, 6, 5, 8, 6. By arranging the numbers with same values together

4, 5, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 8, 8

As '6' occurs more frequently than other observations.

Mode = 6

*Data having only one mode is known as **'Unimodal Data'.***

6.2 బాహుళకం :

ఆవర్గీకృత దత్తాంశము యొక్క ఒక కేంద్రీయ స్థాన మాపనముగా అంకగణిత సగటు ఉండే సందర్భాలను మనం చర్చించాము. ఇచ్చిన దత్తాంశము మరియు దాని ఆవశ్యకత ఆధారముగా ఇతర కేంద్రీయ స్థాన మాపనములు అవసరమగును.

దుకాణదారుడు ఒక వారంలో అమ్మిన వివిధ సైజుల చెప్పుల వివరాలు క్రింద పట్టికలో ఇవ్వబడ్డాయి.

చెప్పు సైజు (అంగుళాలలో)	4"	5"	6"	7"	8"	9"	10"
అమ్మిన చెప్పుల జతల సంఖ్య	22	30	16	70	32	23	10

అయితే ఆ దుకాణదారుడు వారంతరములో ఏ సైజు గల చెప్పులను ఎక్కువ సంఖ్యలో నిల్వ ఉంచుకోవాలి?

అమ్మిన చెప్పుల జతల సంఖ్య యొక్క అంకగణిత సగటును మనం కనుగొందాము.

$$\text{అంకగణిత సగటు} = \frac{\text{రాశుల మొత్తము}}{\text{రాశుల సంఖ్య}}$$

$$= \frac{22+30+16+70+32+23+10}{7} = \frac{203}{7} = 29$$

కాబట్టి దుకాణదారుడు సగటున ప్రతీ సైజు చెప్పులు 29 జతలు అమ్మును. దీని ప్రకారం దుకాణదారుడు ప్రతీ సైజు చెప్పులు 29 జతలు నిల్వ ఉంచాలి. ఇలా చేయుట సరియైన నిర్ణయమేనా? (ఎందుకు)

ఇచ్చిన పట్టిక నుండి 7 అంగుళాల సైజులో ఉన్న చెప్పులు గరిష్ట సంఖ్యలో కొనుగోలు చేసి ఉండటం గమనించవచ్చు. కాబట్టి దుకాణదారుడు 7 అంగుళాల సైజులో ఉన్న చెప్పులను ఎక్కువ సంఖ్యలో నిల్వ ఉంచాలి. అందువల్ల ఈ సందర్భములో అంకగణిత సగటు ఉపయోగపడదు.

ఈ సందర్భములో మనకు బాహుళకం అనే మరో కేంద్రీయ స్థాన మాపనము అవసరమగును.

ఇవ్వబడిన దత్తాంశములో ఎక్కువ సార్లు పునరావృతం అయ్యే రాశిని 'బాహుళకం' అంటారు.

గమనిక: సాధారణముగా పద రూపంలో ఉన్న దత్తాంశము యొక్క ప్రాతినిధ్య విలువగా బాహుళకంను ఉపయోగిస్తాము.

1. పిల్లలు ఎక్కువగా ఇష్టపడే ఐస్ క్రీం ఫ్లావర్ తెలుసుకొనుటకు.
2. ఆట బొమ్మలు తయారు చేసే కంపెనీ వారు పిల్లలు ఎక్కువగా ఏ ఆట బొమ్మను ఇష్టపడుతున్నారో తెలుసుకొనుటకు.

ఉదాహరణ 2 : విద్యార్థుల వయసులు (సంవత్సరాలలో) 8, 5, 6, 6, 5, 7, 5, 6, 5, 4 , 7, 6, 7, 6 , 5, 8 మరియు 6 అయిన వాటి బాహుళకము ఎంత?

సాధన : విద్యార్థుల వయసులు 8, 5, 6, 6, 5, 7, 5, 6, 5, 4 , 7, 6, 7, 6 , 5, 8, 6 గా ఇవ్వబడినది.
ఇచ్చిన రాశులలో ఒకే విలువ గల రాశులను ఒక క్రమ పద్ధతిలో అమర్చితే
4, 5, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 8, 8
మిగతా వాటికంటే '6' ఎక్కువ సార్లు పునరావృతం అయినది.
కాబట్టి బాహుళకము = '6'.

బాహుళకముగా ఒకే ఒక రాశి గల దత్తాంశమును 'ఏక బాహుళక దత్తాంశము' అంటారు.

Example 3 : Find the mode of the data of Grades A, B, E, A, C, E, B, C, D, A, D, C, F, A and C?

Solution : Given, A, B, E, A, C, E, B, C, D, A, D, C, F, A, C.

By arranging the letters of same type together

A, A, A, A, B, B, C, C, C, C, D, D, E, E, F

As 'A' and 'C' occurs most frequently in the data

Mode = A and C

Data having two modes is known as ***'Bimodal Data'.***

Note : i) If each observation in a data is repeated an equal number of times, then the data set has no mode.

ii) If no observation in the data is repeated then the given data has no mode.

Check Your Progress

Find the mode of 10, 9, 12, 10, 8, 7, 6, 10, 9, 7, 8, 5 and 2.

Let's Explore

Take a dice, roll it 20 times and record the numbers you got on its top face. Find the 'Mode' of resulting numbers.

Let's think

The following data shows that the number of hours spent by students for study. Find the mode :

Number of study hours	1	2	3	4	5	6
Number of students	4	2	1	2	1	0

Exercise - 6.2

1. Find mode of the following data.

   i) 2, 3, 7, 5, 3, 2, 6, 7, 1, 2 ii) K, A , B , C, B, C, D, K, B, D, B, K, A, K

   iii) First ten natural numbers iv) 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 7, 7, 8, 8

2. 20 students were participated in 'SWATCH BHARAT ABHIYAN' campaign. The number of days each student participated were 5, 1, 2, 4, 1, 2, 3, 2, 1, 2, 3, 2, 5, 3, 4, 2, 1, 3, 4 and 5. Find mode of the data.

3. The number of goals scored by a football team in different matches are 3, 2, 4, 6, 1, 3, 2, 4, 1 and 6. Find the mode of data.

4. Find the mode of letters in the adjacent figure.

   Verify whether it is Unimodel or Bimodal Data?

ఉదాహరణ 3 : A, B, E, A, C, E, B, C, D, A, D, C, F, A మరియు C యొక్క బాహుళకం ఎంత?

సాధన : A, B, E, A, C, E, B, C, D, A, D, C, F, A, Cలు ఇవ్వబడ్డాయి.

ఇచ్చిన రాశులలో ఒకే విధమైన రాశులను ఒక క్రమ పద్ధతిలో అమర్చితే,

A, A, A, A, B, B, C, C, C, C, D, D, E, E, F

మిగతా వాటికంటే 'A' మరియు 'C' లు ఎక్కువ సార్లు పునరావృతం అయ్యాయి.

కాబట్టి బాహుళకము = 'A' మరియు 'C'

బాహుళకముగా రెండురాశులు గల దత్తాంశమును 'ద్విబాహుళక దత్తాంశము' అంటారు.

గమనిక: i) ఒక దత్తాంశములో ప్రతీ రాశి సమాన సంఖ్యలో పునరావృతం అయితే ఆ దత్తాంశమునకు బాహుళకము ఉండదు.

ii) ఒక దత్తాంశములో ఏ ఒక్క రాశి పునరావృతం కాకపోతే ఆ దత్తాంశమునకు బాహుళకము ఉండదు.

నీ ప్రగతిని తెలుసుకో

10, 9, 12, 10, 8, 7, 6, 10, 9, 7, 8, 5 మరియు 2 రాశుల బాహుళకము ఎంత?

అన్వేషిద్దాం

ఒక పాచికను తీసుకోండి, దానిని 20 సార్లు దొర్లించండి.
పాచిక పై భాగంలో వచ్చిన అంకెలను నమోదు చేయండి.
ఆ అంకెల బాహుళకం కనుగొనుము.

ఆలోచిద్దాం!

కింది పట్టికలో విద్యార్థులు రోజుకు చదువులో వెచ్చించే సమయం (గంటలలో) ఇవ్వబడినది అయిన బాహుళకము కనుగొనుము.

చదువుటలో వెచ్చించిన గంటల సంఖ్య	1	2	3	4	5	6
విద్యార్థులు సంఖ్య	4	2	1	2	1	0

అభ్యాసం - 6.2

1. క్రింది దత్తాంశములకు బాహుళకము కనుగొనుము.

   i) 2, 3, 7, 5, 3, 2, 6, 7, 1, 2

   ii) K, A , B , C, B, C, D, K, B, D, B, K, A, K

   iii) మొదటి 10 సహజ సంఖ్యలు

   iv) 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 7, 7, 8, 8

2. 20 మంది విద్యార్థులు "స్వచ్ఛ భారత్ అభియాన్" కార్యక్రమములో పాల్గొన్నారు. విద్యార్థులు పాల్గొన్న రోజుల సంఖ్య వరుసగా 5, 1, 2, 4, 1, 2, 3, 2, 1, 2, 3, 2, 5, 3, 4, 2, 1, 3, 4 మరియు 5 అయిన బాహుళకము ఎంత?

3. ఒక ఫుట్‌బాల్ జట్టు వివిధ మ్యాచ్‌లలో సాధించిన గోల్స్ సంఖ్య 3, 2, 4, 6, 1, 3, 2, 4, 1 మరియు 6. అయిన బాహుళకం కనుగొనుము.

4. ప్రక్క పటములోని ఇంగ్లీష్ అక్షరాల బాహుళకము కనుగొనుము? ఇది ఏక బాహుళక దత్తాంశమా లేక ద్విబాహుళక దత్తాంశమా?

6.3 Median:

The following are the salaries (in rupees) earned by the manager and the workers in a production unit.

Manager - ₹88,000			
Worker 1	₹6,600	Worker 7	₹9,000
Worker 2	₹10,000	Worker 8	₹9,200
Worker 3	₹8,000	Worker 9	₹9,000
Worker 4	₹8,400	Worker 10	₹6,400
Worker 5	₹7,600	Worker 11	₹6,400
Worker 6	₹7,000	Worker 12	₹6,400

Will the mean salary or the mode of salaries be a representative value for this data?

Let us calculate the mean of the salaries in the production unit.

$$\text{Mean of the salary} = \frac{Sum\ of\ salaries\ of\ all\ employees}{Number\ of\ employees}$$

$$= \frac{88000 + 6600 + 10000 + 8000 + 8400 + 7600 + 7000 + 9000 + 9200 + 9000 + 6400 + 6400 + 6400}{13}$$

$$= \frac{1,82,000}{13} \quad = ₹14,000$$

Is this salary a representative of the salaries of either the manager or the workers? (Why?) It is much lesser than the manager's salary and more greater than the salary of all the workers.

Now, let us consider the mode. From the given data, 6400 is the most frequently occurring value So, Mode = ₹6400.

However, it can't be a representative of the data. (Why?)

So, now, let us use another way of calculating the representative or Central Tendency Value.

First arrange the numbers in ascending order

6400	6400	6400	6600	7000	7600	8000	8400	9000	9000	9200	10000	88000

The middle value of this data is '8000'. Clearly it divides employees into 2 equal groups.

6 are earning more than ₹8,000 and 6 are earning less than ₹8,000.

This value is called 'Median' and as you can see it provides a representative picture or Central Tendency for all the values of the given data.

The middle most value of the data, when the observations are arranged in either ascending or descending order is called 'Median'.

In the above example, the number of observations were 13 i.e. an odd number, thus the median divides the data into 2 equal groups.

Now what is the Median, if the number of observations were in even number?

6.3 మధ్యగతము :

ఒక ఉత్పాదక సంస్థ లో మేనేజర్ మరియు కార్మికుల యొక్క వేతనాల (రూపాయలలో) వివరాలు కింద ఇవ్వబడ్డాయి.

మేనేజరు – ₹88,000			
మొదటి కార్మికుడు	₹6,600	ఏడో కార్మికుడు	₹9,000
రెండవ కార్మికుడు	₹10,000	ఎనిమిదో కార్మికుడు	₹9,200
మూడవ కార్మికుడు	₹8,000	తొమ్మిదో కార్మికుడు	₹9,000
నాలుగో కార్మికుడు	₹8,400	పదో కార్మికుడు	₹6,400
ఐదో కార్మికుడు	₹7,600	పదకొండో కార్మికుడు	₹6,400
ఆరో కార్మికుడు	₹7,000	పన్నెండవ కార్మికుడు	₹6,400

ఈ దత్తాంశానికి సగటు వేతనము లేదా వేతనాల బాహుళకమును ప్రాతినిధ్య విలువలుగా తీసుకోవచ్చునా?

మొదటగా ప్రొడక్షన్ యూనిట్‌లో వేతనాల సగటును మనం లెక్కిద్దాం.

$$\text{వేతనాల సగటు} = \frac{\text{ఉద్యోగులందరి వేతనాల మొత్తం}}{\text{ఉద్యోగుల సంఖ్య}}$$

$$= \frac{88000+6600+10000+8000+8400+7600+7000+9000+9200+9000+6400+6400+6400}{13}$$

$$= \frac{1,82,000}{13} = ₹14,000$$

ఈ వేతనం మేనేజర్ లేదా కార్మికుల వేతనాలకు ప్రాతినిధ్య విలువగా ఉంటుందా? (ఎందుకు?). ఇది మేనేజర్ వేతనం కంటే చాలా తక్కువగా ఉంది మరియు కార్మికుల వేతనాల కంటే చాలా ఎక్కువగా ఉంటుంది.

ఇప్పుడు బాహుళకాన్ని పరిశీలిద్దాం. ఈ దత్తాంశము లో ఎక్కువ సార్లు పునరావృతం అయిన విలువ 6400

కాబట్టి బాహుళకం = ₹6400

అయినప్పటికి, ఇది దత్తాంశం యొక్క ప్రాతినిధ్య విలువగా ఉండదు (ఎందుకు?)

కనుక, ఇప్పుడు కేంద్రీయ స్థాన విలువను లెక్కించడానికి మరో పద్ధతిని పరిశీలిద్దాం.

సంస్థలోని ఉద్యోగుల వేతనాలకు ఆరోహణ క్రమంలో అమర్చగా

6400	6400	6400	6600	7000	7600	8000	8400	9000	9000	9200	10000	88000

ఈ దత్తాంశము యొక్క మధ్యమ విలువ 8000 అగును. ఇది ఉద్యోగం రెండు సమాన సంఖ్య గల సమూహాలుగా విభజిస్తుంది.

₹ 8,000 కంటే ఎక్కువ సంపాదించే ఆరుగురు ఉద్యోగులు మరియు ₹ 8,000 కంటే తక్కువ సంపాదించే ఆరుగురు ఉద్యోగులుగా విభజిస్తుంది.

ఈ విలువనే **మధ్యగతం** అంటారు. ఈ సంస్థలోని ఉద్యోగుల వేతనాలకు ఇది ప్రాతినిధ్య విలువ లేదా కేంద్రీయ స్థాన విలువగా ఉంటుందని గమనించవచ్చు.

దత్తాంశములోని రాశులను ఆరోహణ లేదా అవరోహణ క్రమములో అమర్చగా, ఆ అమరికలోని మధ్యమ విలువను మధ్యగతం అంటారు.

పై ఉదాహరణలో పరిశీలనల సంఖ్య 13 ఒక బేసి సంఖ్య. కాబట్టి మధ్యగతం దత్తాంశమును రెండు సమాన భాగాలుగా విభజిస్తుంది.

పరిశీలనల సంఖ్య సరిసంఖ్య అయిన అప్పుడు మధ్యగతం ఎమిటి?

Let us take the example of the production unit again.

If a new worker joined and earning ₹8,200 in the production unit, then what will be the Median?

Arrange the salaries in ascending order :

6400	6400	6400	6600	7000	7600	8000	8200	8400	9000	9000	9200	10000	88000

Here both 8000 and 8200 lie in the middle of the data.

Here the median will be calculated by finding the average of these two values.

$$\text{Thus, the median salary} = \frac{8000+8200}{2} = \frac{16200}{2} = ₹8,100/-$$

Example 4 : Find the median of data 32, 43, 25, 67, 46, 71 and 182.

Solution : Given 32, 43, 25, 67, 46, 71, 182

Arrange the given observations in ascending order

25, 32, 43, 46, 67, 71, 182

In '7' observations the 4th obsrevation is the middle most value.

$\therefore$ Median = 46

If the number of observations(n) is odd then median is $\left(\frac{n+1}{2}\right)^{th}$ observation.

Example 5 : The monthly incomes of 8 members are ₹8000, ₹9000, ₹8200, ₹7900, ₹8500, ₹8600, ₹7700 and ₹60000. Find the median income.

Solution : Given that, the monthly incomes of 8 members are:

₹8000, ₹9000, ₹8200, ₹7900, ₹8500, ₹8600, ₹7700, ₹60000

Arrange the given observations in ascending order:

7700, 7900, 8000, 8200, 8500, 8600, 9000, 60000

Here, we have two middle most values 8200 and 8500.

In this case, Median = Average of two middle most values

$$= \frac{8200+8500}{2} = \frac{16700}{2} = ₹8,350$$

If number of observations(n) is even then the median is

Average of $\left(\frac{n}{2}\right)^{th}$ and $\left(\frac{n}{2}+1\right)^{th}$ observations

Check Your Progress

What is the median of first 7 prime numbers?

Let's Explore

Collect 10th class pass percentage for last six years of your school (or) your near by school. Find Median of the data.

పై ఉత్పాదక సంస్థ ఉదాహరణనే మరలా తీసుకుందాం.

రూ. 8,200 వేతనంగా గల మరో వ్యక్తి ఉత్పాదక సంస్థలో కొత్తగా చేరాడు అనుకొందాము? అప్పుడు కొత్త మధ్యగతం ఎంత?

ఇప్పుడు 14 మంది వేతనాలను ఆరోహణ క్రమం లో అమర్చుదాం.

6400	6400	6400	6600	7000	7600	8000	8200	8400	9000	9000	9200	10000	88000

ఈ దత్తాంశములో 8000 , 8200 అనే రెండు విలువలు మధ్యమ విలువలుగా ఉన్నాయి.

ఇలాంటి సందర్భాలలో ఈ రెండు విలువలు సరాసరి కనుక్కోవటం ద్వారా మధ్యగతాన్ని గణిస్తాము.

$$\text{కాబట్టి మధ్యగత వేతనం} = \frac{8,000 + 8,200}{2} = \frac{16,200}{2} = ₹8,100/-$$

ఉదాహరణ 4: 32, 43, 25, 67, 46, 71 మరియు 182 ల మధ్యగతము కనుగొనుము.

సాధన : 32, 43, 25, 67, 46, 71, 182

ఇచ్చిన రాశులు ఆరోహణ క్రమములో అమర్చితే

25, 32, 43, (46), 67, 71, 182

దత్తాంశములోని ఏడు రాశులలో 4వ రాశి మధ్యపదం అగును

∴ మధ్యగతము = 46

ఇచ్చిన దత్తాంశములో రాశుల సంఖ్య(n) బేసి సంఖ్య అయిన మధ్యగతము $\left(\frac{n+1}{2}\right)^{వ}$ పదము అగును.

ఉదాహరణ 5 : 8 మంది నెలసరి ఆదాయాలు ₹8000, ₹9000, ₹8200, ₹7900, ₹8500, ₹8600, ₹7700 మరియు ₹60000 అయిన వారి మధ్యగత ఆదాయాన్ని కనుగొనుము.

సాధన: 8 కుటుంబాల నెలసరి ఆదాయాలు

₹8000, ₹9000, ₹8200, ₹7900, ₹8500, ₹8600, ₹7700, ₹60000

ఆదాయాలను ఆరోహణ క్రమములో అమర్చితే

7700, 7900, 8000, 8200, 8500, 8600, 9000, 60000

మధ్యమ పదాలు 8200 మరియు 8500

మధ్యగతం, 8200, 8500ల సరాసరి అగును

$$\text{మధ్యగతం} = \frac{8200 + 8500}{2} = \frac{16700}{2} = ₹8,350$$

ఇచ్చిన దత్తాంశములో రాశుల సంఖ్య(n) సరి సంఖ్య అయిన

మధ్యగతము $\left(\frac{n}{2}\right)$వ మరియు $\left(\frac{n}{2}+1\right)$వ పదాల సరాసరి అగును.

నీ ప్రగతిని తెలుసుకో

మొదటి 7 ప్రధాన సంఖ్యల మధ్యగతము కనుగొనుము.

అన్వేషిద్దాం

మీ పాఠశాల లేదా మీకు సమీపంలో గల పాఠశాల యొక్క గత 6 సంవత్సరాల పదవ తరగతి ఉత్తీర్ణతా శాతములను నమోదు చేసి మధ్యగతము కనుగొనుము.

Exercise - 6.3

1. Find the Median of the following :

   i) 7, 3, 15, 0, 1, 71, 19, 4, 17   ii) 12, 23, 11, 18, 15, 20, 86, 27

2. The number of pages in text books of different subjects are 421, 175, 128, 117,150, 145, 147 and 113 find Median of given data.

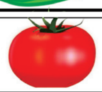
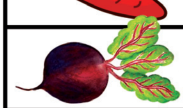
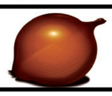
3. The weekly sales of motor bikes in a showroom for the past 14 weeks are 10, 6, 8, 3, 5, 6, 4, 7, 12, 13, 16, 10, 4 and 7. Find the Median of the data.

4. Find the Median of 0.3, 0.25, 0.32, 0.147, 0.19, 0.2 and 7.1

5. If the Median of observations $2x$, $3x$, $4x$, $5x$, $6x$, $(x > 0)$ is 28 then find the value of 'x'?

Project Work

Visit any vegetable market along with your parent. Collect the information about the costs of different vegetables. By using this data fill the following table.

Name of the Vegetable		Cost per kg	Central Tendency Values
	Lady's finger		**i) Arithmetic Mean =**
	**Tomato**		
	Carrot		**ii) Mode =**
	**Beetroot**		
	Green Chilli		**iii) Median =**
	Brinjal		
	**Onion**		

Measure of Central Tendency	Useful situation
Arithmetic Mean	When data set has no extreme values.
Mode	When the data has many identical values and for quick calculation.
Median	When the data set has extreme values and there are no big gaps in the middle of the data.

అభ్యాసం - 6.3

1. క్రింది దత్తాంశములకు మధ్యగతము కనుగొనుము

   i) 7, 3, 15, 0, 1, 71, 19, 4, 17   ii) 12, 23, 11, 18, 15, 20, 86, 27

2. విభిన్న సబ్జెక్టులకు సంబంధించిన పాఠ్యపుస్తకములలో గల పేజీల సంఖ్యలు 421, 175, 128,117, 150, 145, 147 మరియు 113 అయిన ఈ దత్తాంశమునకు మధ్యగతము కనుగొనుము.

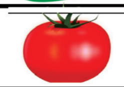
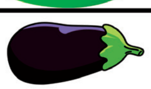
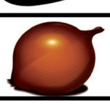
3. ఒక మోటారు వాహనముల దుకాణములో గత 14 వారములలో అమ్మిన వాహనముల సంఖ్య వరుసగా 10, 6, 8, 3, 5, 6, 4, 7, 12, 13, 16, 10, 4 మరియు 7 అయిన వాటి మధ్యగతము కనుగొనుము.

4. 0.3, 0.25, 0.32, 0.147, 0.19, 0.2, 7.1 ల మధ్యగతాన్ని కనుగొనండి.

5. $2x$, $3x$, $4x$, $5x$, $6x$, $(x > 0)$ రాశుల మధ్యగతము 28 అయిన x విలువ ఎంత?

ప్రాజెక్టు పని

మీ తల్లి/తండ్రితో పాటు దగ్గరలోని కూరగాయల మార్కెట్‌ను సందర్శించి, వివిధ కూరగాయల ధరలు సేకరించండి. క్రింది పట్టికను పూరించి కేంద్రీయ స్థాన విలువలు కనుగొనుము.

కూరగాయ పేర్లు		1 కేజి ధర	అంకమధ్యమం
	బెండకాయ		i) అంకగణిత సగటు =
	టమాట		
	క్యారెట్		ii) బాహుళకము =
	బీట్‌రూట్		
	పచ్చిమిరపకాయ		iii) మధ్యగతం =
	వంకాయ		
	ఉల్లిపాయ		

కేంద్రీయ స్థాన మాపనము	అత్యంత ఉపయోగకరమైన సందర్భము
అంకగణిత సగటు	దత్తాంశములోని రాశుల విలువల మధ్య వ్యత్యాసం తక్కువగా ఉన్నప్పుడు.
బాహుళకం	దత్తాంశములో ఒకే విధమైన అనేక విలువలు ఉన్నప్పుడు మరియు వేగముగా గణించుటకు.
మధ్యగతం	దత్తాంశములోని రాశుల విలువల మధ్య వ్యత్యాసం బాగా ఎక్కువగా ఉన్నప్పుడు మరియు దత్తాంశం మధ్య విలువలో పెద్ద వ్యత్యాసం లేనప్పుడు

6.4 Visual Representation of the Data:

You have already learnt how to present data as a visual representation in the form of pictographs and bar graphs in the previous class.

Prasanna wanted to buy a mobile phone. He selected two mobile phones of different companies having same features. Now he would like to know which mobile phone has good performance. He collected the information of star rating from different magazines and news papers.

1. What information is given in the table?
2. Is the above information being useful to Prasanna?
3. Which mobile phone you will suggest to Prasanna?

Data represented in the form of pictures, graphs or charts is Visual Representation. Visual Representation makes the data clear to understand. Data visualisation is important in data analysis because it is able to make the data easily and quickly understood.

Bar graph:

Samuel : Shabreen, did you observe our school display board.

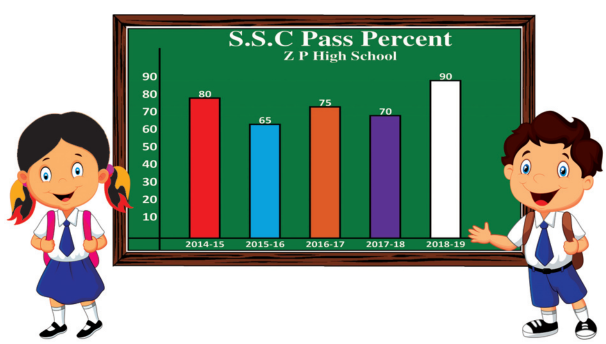
Shabreen : Yes, it was about our school S.S.C pass percentage.

Samuel : Can you tell our school pass percentage in 2018 - 19.

Shabreen : Yes, the pass percentage was 70.

Samuel : Can you remember what type of visual representation it is.

Shabreen : Yes, It is 'Bar graph'.



Representation of numerical data by using bars of uniform width is called 'Bar graph'. In bar graphs the width of all rectangles (bars) is equal and the height (length) of each bar is proportional to the data that it represents.

6.4 సమాచారమును దృశ్య రూపములో ప్రదర్శించుట :

దత్తాంశమును పట చిత్రము మరియు కమ్మీరేఖా చిత్ర రూపములో ప్రదర్శించుటను ఇంతకు ముందు తరగతి లో మీరు నేర్చుకున్నారు.

ప్రసన్న ఒక మొబైల్ ఫోన్ కొనాలనుకున్నాడు. అతను ఒకే లక్షణాలు (సౌకర్యాలు) గల రెండు విభిన్న కంపెనీల మొబైల్ ఫోన్లను ఎంపిక చేసుకున్నాడు. ఈ రెండు మొబైల్ ఫోనుల్లో ఏది మెరుగైనదో అతను తెలుసుకోవాలనుకున్నాడు. అతను వివిధ పత్రికలు మరియు మ్యాగజైన్లు నుండి ఈ క్రింది సమాచారమును సేకరించాడు.

లక్షణాలు	ఫోన్ - A	ఫోన్ - B
కెమెరా	★★★★★	★★★½☆
డిస్ప్లే	★★★★☆	★★★☆☆
మెరుగుదల	★★★★½	★★★★☆
బ్యాటరీ	★★★★☆	★★½☆☆
మెమరీ	★★★★½	★★½☆☆

1. పై పట్టికలో గల సమాచారం దేనిని సూచిస్తుంది?
2. పట్టికలోని సమాచారం ప్రసన్నకు ఉపయోగపడుతుందా?
3. నీవైతే ప్రసన్న కు, ఏ మొబైల్ ఫోన్ ను సూచిస్తావు?

ఇచ్చిన సమాచారాన్ని చిత్రాలు, గ్రాఫులు లేదా చార్టుల రూపములో ప్రదర్శించుటనే దృశ్య రూప ప్రదర్శన అంటారు. ఇచ్చిన దత్తాంశమును దృశ్య రూపములో ప్రదర్శించుట వలన సమాచారమును అర్థం చేసుకొనుట సులభం అగును. దత్తాంశము యొక్క దృశ్య రూప ప్రదర్శన ఇచ్చిన సమాచారమును విశ్లేషించుటకు మరియు తేలికాగా త్వరితగతిన అవగాహన చేసుకొనుటకు ముఖ్యమైనది.

కమ్మీ చిత్రము :

శామ్యూల్ : షబీన్, మన పాఠశాలలోని ప్రదర్శన (display) బోర్డును గమనించావా?

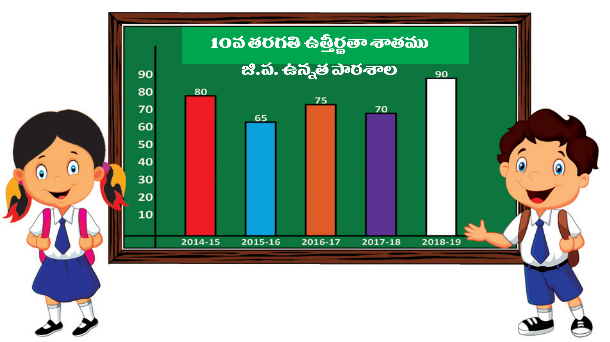
షబీన్ : అవును, అది పదవతరగతి ఉత్తీర్ణతా శాతమును తెలియచేస్తుంది కదా!

శామ్యూల్ : 2018 - 19 విద్యా సంవత్సరములో మన పాఠశాల యొక్క ఉత్తీర్ణతా శాతము ఎంతో చెప్పగలవా?

షబీన్ : అవును. ఉత్తీర్ణత శాతం 70.

శామ్యూల్ : ఈ విధమైన దృశ్య రూప ప్రదర్శనను ఏమని పిలుస్తారో, గుర్తుందా?

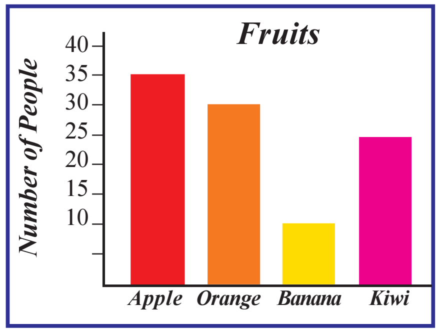
షబీన్ : గుర్తుంది, దీనిని కమ్మీ చిత్రం అంటారు.



ఇచ్చిన సంఖ్యా దత్తాంశమును సమాన వెడల్పు గల కమ్మీల రూపంలో ప్రదర్శించటాన్నే "కమ్మీ చిత్రం" అంటారు. కమ్మీ చిత్రంలోని కమ్మీల వెడల్పు సమానంగా ఉండును మరియు కమ్మీ ఎత్తు (పొడవు) అది సూచించే అంశము యొక్క విలువకు అనులోమానుపాతములో ఉంటుంది.

Check Your Progress

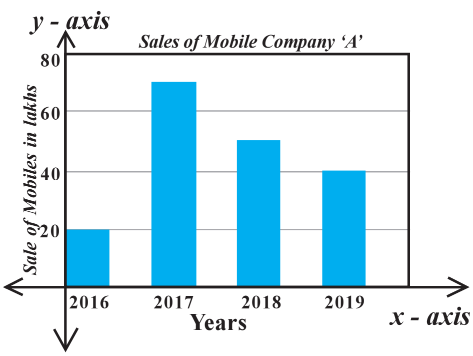
Observe the adjacent bar graph and answer the following:

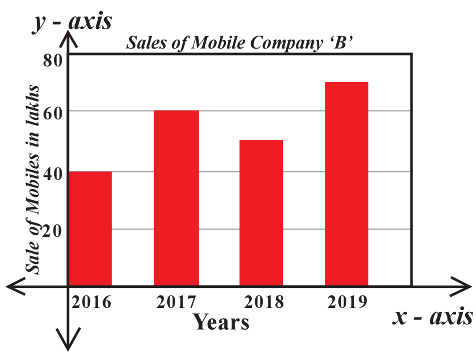


1. Which fruit most of the people like?
2. How many people likes banana?

6.4.1 Double bar graph:

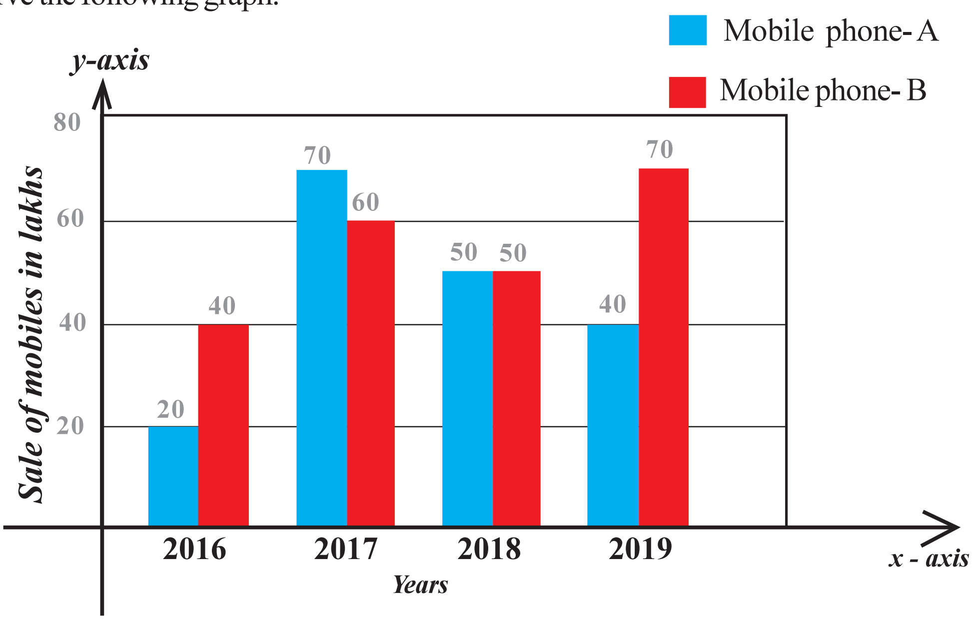
Observe the following two bar graphs which shows the sales of two mobile phone companies A and B in various years:





From the above bar graphs, we can study the individual sale capability of A and B. But we want to compare sales of both companies in every year, we need a different visual representation.

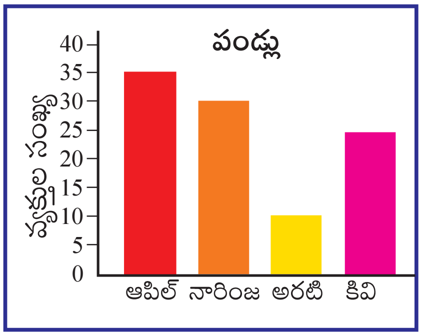
Observe the following graph.



By using the above graph, it is easy to compare the sales of both companies.

These type of graphs are called 'Double bar graphs'.

నీ ప్రగతిని తెలుసుకో

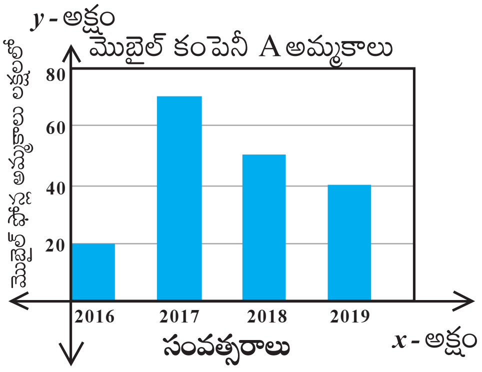


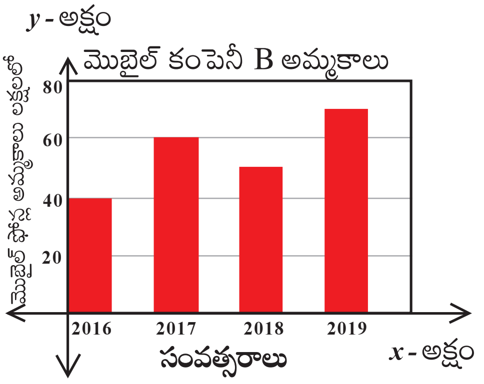
ప్రక్క కమ్మీ చిత్రంను గమనించి కింది ప్రశ్నలకు సమాధానాలు రాయుము.

1. ఎక్కువ మంది ఇష్టపడే పండు ఏది?
2. అరటి పండును ఇష్టపడే వారి సంఖ్య ఎంత?

6.4.1 రెండు వరుసల కమ్మీ చిత్రాలు (డబుల్ బార్ గ్రాఫ్)

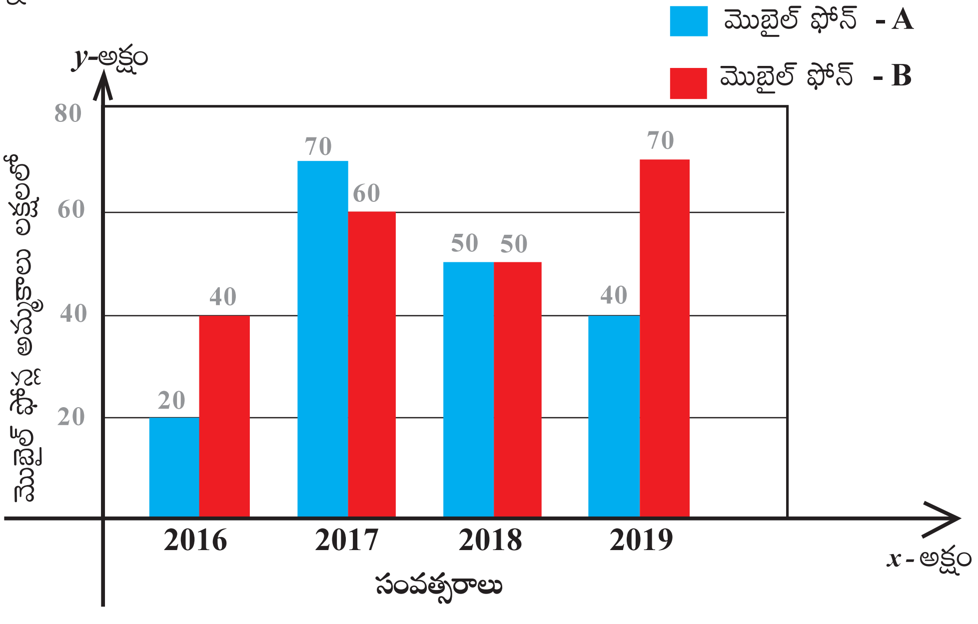
క్రింది కమ్మీ చిత్రాలను గమనించండి. ఇవి వివిధ సంవత్సరాలలో రెండు మొబైల్ ఫోన్ కంపెనీలు A, B ల అమ్మకాలను సూచిస్తున్నాయి.





మనం పై కమ్మీ చిత్రాల నుండి ప్రతి మొబైల్ ఫోన్ కంపెనీలు A, Bల వ్యక్తిగత అమ్మకపు సామర్థ్యాన్ని విశ్లేషించవచ్చు. కాని రెండు కంపెనీల అమ్మకపు సామర్థ్యాన్ని సరిపోల్చుటకు ప్రతి సంవత్సరం మనకు విభిన్న దృశ్యరూప ప్రదర్శన అవసరం అగును.

క్రింది చిత్రాన్ని గమనించండి.



పై చిత్రాన్ని ఉపయోగించి మనం రెండు కంపెనీల అమ్మకపు సామర్థ్యాన్ని సరిపోల్చుట సులభమగును. ఇటువంటి కమ్మీ చిత్రమునే రెండు వరుసల కమ్మీ చిత్రం (డబుల్ బార్ గ్రాఫ్) అంటాము.

Observe the above double bar graph and answer the following:

1. In which year the sales of both mobile phone companies are equal?
2. In 2017, which mobile phone company has more sales?

So, 'Double bar graph' is used to display two sets of data on the same graph. With the help of 'Double bar graph', we can compare the two group of observations in a single look.

6.4.2 Construction of Double bar graph:

Example 6 : The number of CFL bulbs and LED bulbs by a seller every month from March to August are given Below. Draw by vertical double bar graph.

MONTH	CFL BULBS	LED BULBS
March	70	75
April	35	30
May	65	75
June	90	100
July	22	35
August	50	50

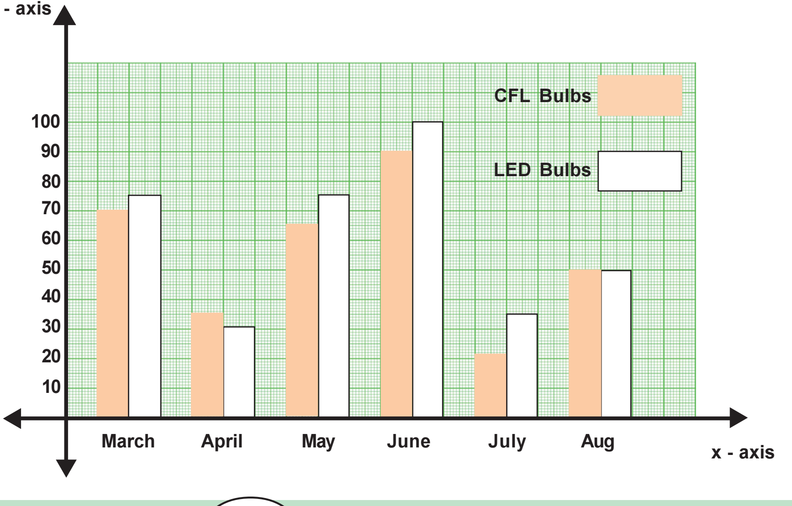
Solution: Steps in drawing a Double bar graph:

1. Draw x-axis (horizontal line) and y - axis (vertical line) on the graph paper and mark their intersection point as 'O'.
2. Take 'months' on x - axis.
3. Take number of CFL and LED bulbs on y - axis.
4. Take an appropriate scale on y - axis so that number of both the bulbs can be shown easily. Here the maximum value to be plotted on y - axis as 100, so let us take 1cm = 10 bulbs on y - axis.
5. Find the length of each bar by dividing the value by 10 (as scale is 1cm = 10 bulbs).

Eg : Length of bar represents 70 CFL bulbs = $\frac{70}{10}$ = 7 cm

Length of bar represents 75 LED bulbs = $\frac{75}{10}$ = 7.5 cm

6. Draw the bars of uniform width representing 'CFL bulb' and 'LED bulb' side by side of every month.



పైన ఇవ్వబడిన రెండు వరుసల కమ్మీ చిత్రంను పరిశీలించి క్రింది ప్రశ్నలకు సమాధానాలు రాయండి.

1. ఏ సంవత్సరము లో రెండు మొబైల్ ఫోన్ కంపెనీల అమ్మకాలు సమానం?
2. 2017 వ సంవత్సరము లో ఏ మొబైల్ ఫోన్ కంపెనీ అమ్మకాలు ఎక్కువ?

కాబట్టి, రెండు విభిన్న దత్తాంశములను ఒకే గ్రాఫు కాగితము పై ప్రదర్శించుటకు రెండు వరుసల కమ్మీ చిత్రంను ఉపయోగిస్తాము. రెండు వరుసల కమ్మీ చిత్రంను ఉపయోగించి రెండు విభిన్న దత్తాంశములను ఒకే సారి సరిపోల్చవచ్చు.

6.4.2 రెండు వరుసల కమ్మీ చిత్రాలను నిర్మించుట :

ఉదాహరణ 6 : ఒక దుకాణదారుడు మార్చి నుండి ఆగష్టు వరకు ప్రతీ నెలలో అమ్మిన CFL బల్బులు మరియు LED బల్బుల అమ్మకాల వివరాలు క్రిందిపట్టికలో ఇవ్వబడ్డాయి అయిన క్రింది దత్తాంశమునకు రెండు వరుసల కమ్మీ చిత్రాన్ని నిర్మించండి.

నెల	CFL బల్బులు	LED బల్బులు
మార్చి	70	75
ఏప్రిల్	35	30
మే	65	75
జూన్	90	100
జూలై	22	35
ఆగష్టు	50	50

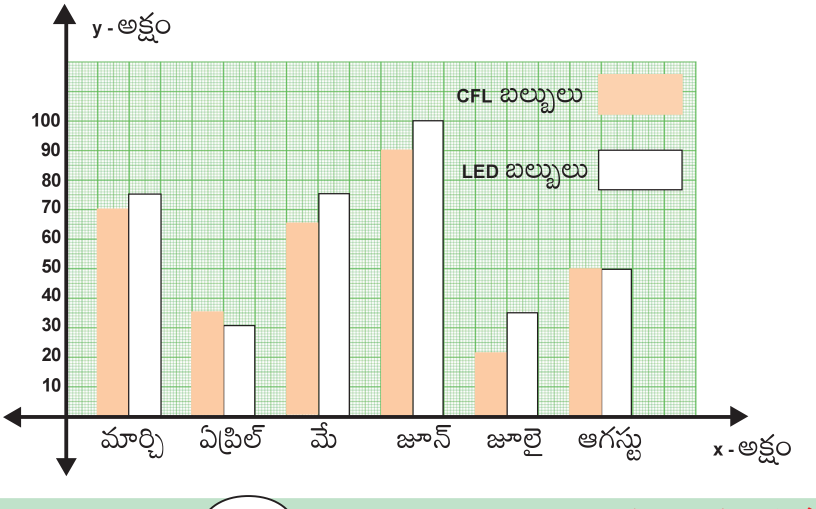
సాధన : రెండు వరుసల కమ్మీ చిత్రం నిర్మాణములో సోపానాలు:

1. గ్రాఫు కాగితము పై x – అక్షం (క్షితిజ రేఖ), y – అక్షం (నిలువు రేఖ) గీయండి. వాటి ఖండన బిందువును 'O'గా గుర్తించండి.
2. x – అక్షంపై నెలల పేర్లు తీసుకోండి.
3. y – అక్షంపై CFL బల్బులసంఖ్య, LED బల్బులసంఖ్యను తీసుకోండి.
4. రెండు రకాల బల్బుల సంఖ్య గ్రాఫ్ కాగితముపై గుర్తించుటకు వీలుగా సరైన స్కేలును y - అక్షంపై తీసుకోండి. y – అక్షంపై గుర్తించవలసిన గరిష్ట విలువ 100. కాబట్టి 1సెం.మీ = 10 బల్బులుగా తీసుకోవచ్చు.
5. ఇచ్చిన విలువలను 10తో భాగించుట ద్వారా కమ్మీ పొడవు నిర్ధారించండి. (సూచిక భిన్నం 1 సెం.మీ = 10 బల్బులు).

ఉదా : 70 CFL బల్బులను సూచించు కమ్మీ పొడవు = $\frac{70}{10}$ = 7 సెం.మీ

75 LED బల్బులను సూచించు కమ్మీ పొడవు = $\frac{75}{10}$ = 7.5 సెం.మీ

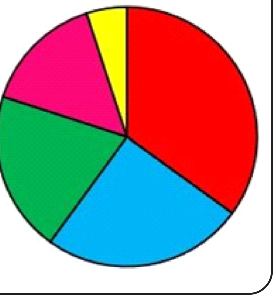
5. ప్రతీ నెలలో అమ్మిన CFL బల్బుల మరియు LED బల్బుల సంఖ్యను సమాన వెడల్పు గల కమ్మీల రూపములో ప్రక్క ప్రక్కన గీయండి.



6.4.3 Pie charts :

Observe the adjacent figure :

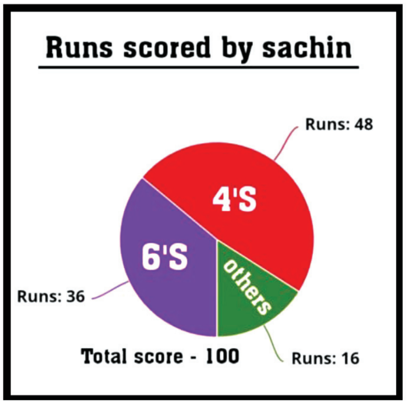
1. Largest portion of the circle is shaded by which colour?
2. Are the portions of circle shaded by blue and pink are in same size?
3. Smallest portion of the circle is shaded by which colour?

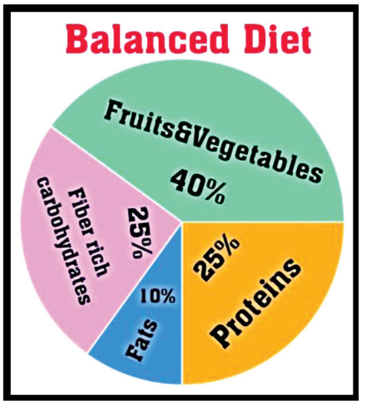


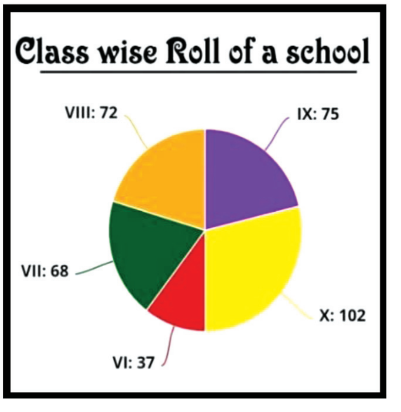
In the above figure, you can observe that the circle is divided in to some component parts. Have you observed that each component part is bounded by an arc and two radii of circle?

These parts of the circle are called 'sectors' of the circle.

Children, observe the following figures. Have you observe data represented in the circular form?







This type of chart, which display information as parts of a circle (sector) is called a 'Pie chart'.

The 'Pie chart' represents each item as a portion of the circle, as how much part of 'the total item' is shared by each item.

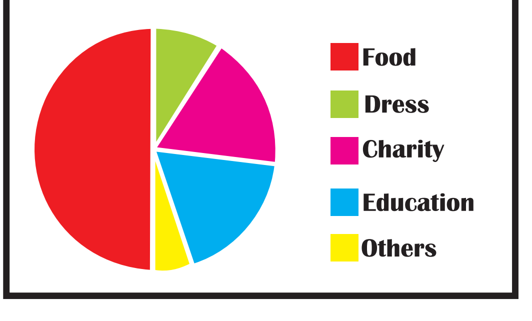
'Pie chart' is the visual representation of the numerical data by sectors of the circle such that angle of each sector (area of sector) is proportional to value of the data that it represents.

Observe the below picture which shows various expenses of Manasa's family :

i) For which item highest amount spent?

ii) For which items same amount spent?

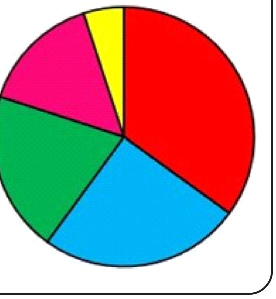
iii) For which item least amount spent?



6.4.3 వృత్త రేఖా చిత్రము (పై చిత్రము) :

ప్రక్క పటంను గమనించండి.

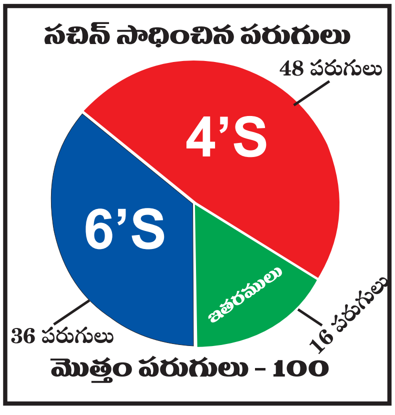
1. వృత్తములోని అధిక భాగము ఏ రంగుతో షేడ్ చేయబడినది?
2. నీలం రంగు, పింక్ రంగు భాగాలు సమాన పరిమాణములో ఉన్నాయా?
3. వృత్తము లోని అత్యల్ప భాగము ఏ రంగుతో షేడ్ చేయబడినది?

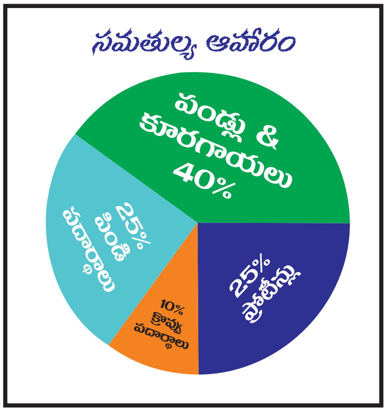


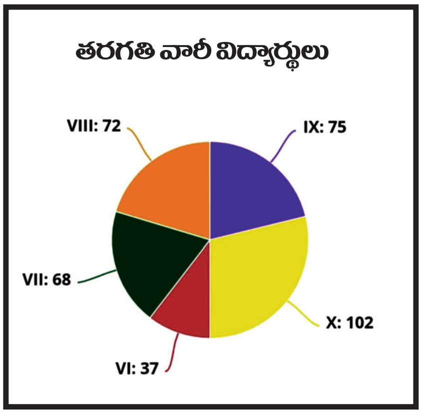
పై పటములో వృత్తం కొన్ని భాగాలుగా విభజించబడి ఉండడం మనం గమనించవచ్చు. ప్రతీ భాగము, రెండు వ్యాసార్థాలు మరియు వృత్త చాపములతో ఆవరించబడి ఉండుట గమనించారా?

వృత్తములోని ఈ భాగాలనే "సెక్టార్లు" అంటారు.

పిల్లలూ, క్రింది పటాలను పరిశీలించండి. మీరు దత్తాంశంను వృత్త రూపంలో సూచించటను గమనించారా?







ఈ విధముగా వృత్తమును భాగాలు (సెక్టార్లు)గా విభజించుట ద్వారా దత్తాంశమును ప్రదర్శించుటనే పై చిత్రం లేదా వృత్త రేఖా చిత్రం అంటాము. పై చిత్రము వృత్తములోని ప్రతి భాగమును సూచిస్తుంది. మొత్తం అంశాలలో ప్రతి అంశము ఎంత భాగం పంచుకుంటుందో సూచిస్తుంది.

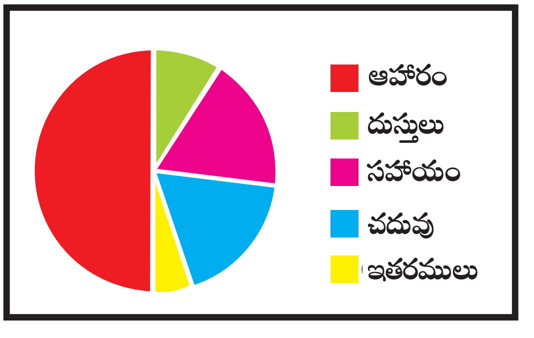
కాబట్టి ఇచ్చిన సమాచారాన్ని వృత్తమును సెక్టార్లుగా విభజించుట ద్వారా దృశ్య రూపములో ప్రదర్శించుటననే పై చిత్రం లేదా వృత్త రేఖా చిత్రం అంటాము. ప్రతీ సెక్టారు కేంద్రం వద్ద చేసే కోణము (సెక్టారు వైశాల్యము) అది సూచించే అంశ విలువకు అనులోమానుపాతంలో ఉంటుంది.

కింది పటములో మానస కుటుంబం యొక్క వివిధ ఖర్చుల వివరాలు చూపబడ్డాయి.

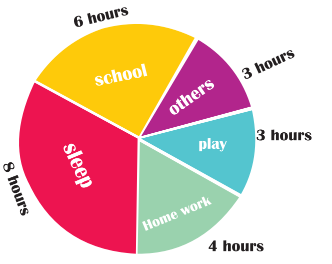
i) అధిక భాగం దేని కొరకు ఖర్చు పెట్టబడింది?

ii) సమాన మొత్తంలో ఖర్చు చేయబడిన అంశాలు ఏవి?

iii) అత్యల్ప భాగం దేని కొరకు ఖర్చు పెట్టబడింది?



6.4.4 Interpretation of Pie chart :



Observe the adjacent Pie chart:

It is about the time spent by a child during a day.

The size of each sector is proportional to information it represents and also each sector shows the relation between whole and its part.

i) Proportion of sector for hours spent in sleeping $= \dfrac{Number\ of\ sleeping\ hours}{Whole\ day}$

$$= \frac{8\,hours}{24\,hours}$$

$$= \frac{1}{3}^{rd} \text{ of circle}$$

As, total angle at the center of circle = 360^0

So, angle of the sector represents sleeping = $\dfrac{1}{3} \times 360^0 = 120^0$

ii) Proportion of sector for hours spent in playing $= \dfrac{Number\ of\ sleeping\ hours}{Whole\ day}$

$$= \frac{3\,hours}{24\,hours}$$

$$= \frac{1}{8}^{th} \text{ of circle}$$

Angle of the sector represents playing = $\dfrac{1}{8} \times 360^0 = 45^0$

So from the above,

$$\text{Angle of sector} = \frac{Value\ of\ the\ item}{Sum\ of\ the\ values\ of\ all\ items} \times 360^{\circ}$$

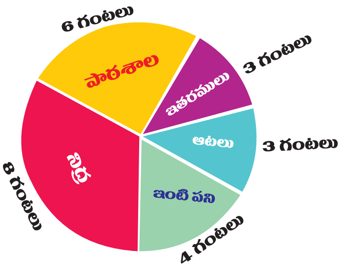
6.4.4 Construction of Pie chart:

Now let us learn about how data is presented on a pie chart.

Example 7 :

In a school, there are 100 students in class VII and each one is a member of any one of the club. The following table shows the number of students in various clubs, then.

6.4.4 వృత్త రేఖా చిత్రం (పై చిత్రం) - వ్యాఖ్యానించుట :



పక్క పై చిత్రం ను పరిశీలించండి. ఇది ఒక రోజులో విద్యార్థి గడిపిన సమయం గురించి తెలియచేస్తుంది. ప్రతి సెక్టారు యొక్క పరిమాణం అది ప్రాతినిధ్యం వహించే సమాచారానికి అనులోమానుపాతంలో ఉంటుంది.

ప్రతి సెక్టారు, అంశం మొత్తం మరియు అది ప్రాతినిధ్యం వహించే అంశానికి మధ్య సంబంధాన్ని చూపుతుంది.

i) నిద్రలో గడిపిన సమయం కొరకు సెక్టారు యొక్క భాగము $= \dfrac{\text{నిద్రలో గడిపిన సమయం}}{\text{ఒక పూర్తి దినం}}$

$= \dfrac{8 \text{ గంటలు}}{24 \text{ గంటలు}}$

$=$ వృత్తంలో $\dfrac{1}{3}$వ భాగము

వృత్త కేంద్రం వద్ద మొత్తం కోణం = 360^0

కాబట్టి, నిద్రలో గడిపిన సమయానికి ప్రాతినిధ్యం వహించే సెక్టారు కోణం = $\dfrac{1}{3} \times 360^0 = 120^0$

ii) ఆటలలో గడిపిన సమయం కొరకు సెక్టారు యొక్క భాగము $= \dfrac{\text{ఆటలలో గడిపిన సమయం}}{\text{ఒక పూర్తి దినం}}$

$= \dfrac{3 \text{ గంటలు}}{24 \text{ గంటలు}}$

$=$ వృత్తంలో $\dfrac{1}{8}$ వ భాగం

ఆటలలో గడిపిన సమయానికి ప్రాతినిధ్యం వహించే సెక్టారు కోణం = $\dfrac{1}{8} \times 360^0 = 45^0$

పై వాటి నుండి

సెక్టారు కోణం = $\dfrac{\text{అంశము విలువ}}{\text{అన్ని అంశముల విలువల మొత్తము}} \times 360^0$

6.4.5 వృత్త రేఖా చిత్రము నిర్మాణము (పై చిత్రం):

వృత్త రేఖా చిత్ర రూపములో సమాచారం ఎలా ప్రదర్శిస్తామో ఇప్పుడు నేర్చుకుందాం.

ఉదాహరణ 7: ఒక పాఠశాలలోని 7వ తరగతిలో 100 మంది విద్యార్థులు కలరు. 7వ తరగతిలోని ప్రతీ విద్యార్థి ఏదో ఒక క్లబ్‌లో సభ్యులుగా ఉన్నారు. కింది పట్టిక వివిధ క్లబ్‌లలోని విద్యార్థుల సంఖ్యను చూపుతుంది, అయిన

Construct the pie chart to following data :

Club	Number of members
Mathematics	50
Science	30
Social Studies	40
English	40
Arts	20

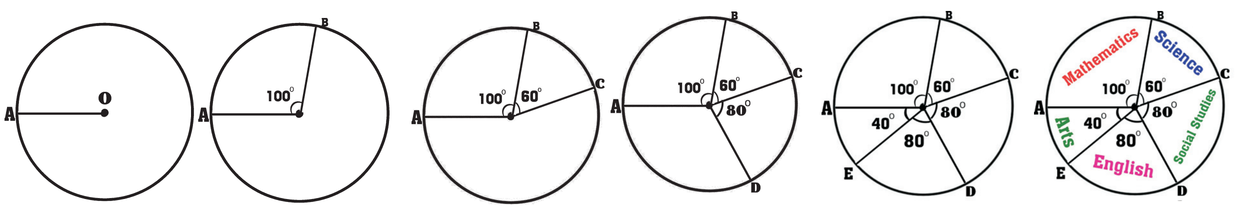
Solution: The angle of each sector will depend on the ratio between the number of students in club and total number of students.

$$\text{Angle of sector} = \frac{\textit{Value of the item}}{\textit{Sum of the values of all items}} \times 360^0$$

Clubs	Number of members	Angle of sector $= \frac{\textit{Value of the item}}{\textit{Sum of the values of all items}} \times 360^0$
Mathematics	50	$\frac{50}{180} \times 360^0 = 100^0$
Science	30	$\frac{30}{180} \times 360^0 = 60^0$
Social studies	40	$\frac{40}{180} \times 360^0 = 80^0$
English	40	$\frac{40}{180} \times 360^0 = 80^0$
Arts	20	$\frac{20}{180} \times 360^0 = 40^0$
Total	180	360^0

Steps of construction:

1. Draw a circle with any convenient radius and mark it's centre as 'O'.
2. Mark a point A, somewhere on the circumference and join OA.
3. Construct $\angle AOB = 100^\circ$ to represent angle of the sector for Maths club.
4. Construct $\angle BOC = 60^\circ$ to represent angle of the sector for Science club.
5. Construct $\angle COD = 80^\circ$ to represent angle of the sector for Social studies club.
6. Construct $\angle DOE = 80^\circ$ to represent angle of the sector for English club.
7. Now $\angle EOA = 40^\circ$ represents the angle of the sector for Arts club.



పట్టికలోని సమాచారానికి పై చిత్రాన్ని గీయండి.

క్లబ్	సభ్యుల సంఖ్య
గణితం	50
సామాన్య శాస్త్రం	30
సాంఘిక శాస్త్రం	40
ఇంగ్లీషు	40
కళలు	20

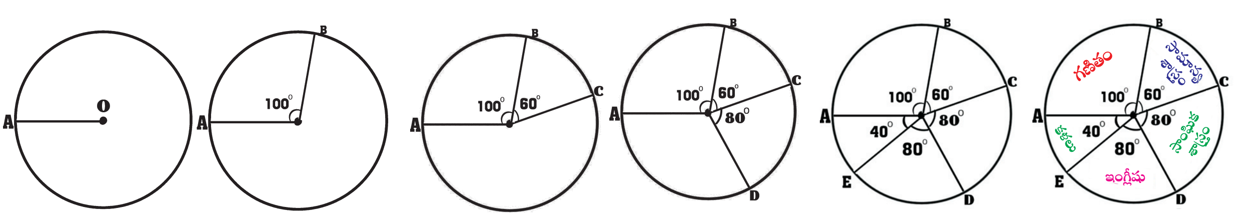
సాధన: సెక్టారు యొక్క కోణం క్లబ్‌లోని విద్యార్థుల సంఖ్య మరియు మొత్తం విద్యార్థుల సంఖ్యకు గల నిష్పత్తిపై ఆధారపడును.

$$\text{సెక్టారు కోణం} = \frac{\text{అంశము విలువ}}{\text{అన్ని అంశముల విలువల మొత్తము}} \times 360^0$$

క్లబ్	సభ్యుల సంఖ్య	సెక్టారు కోణం = $\frac{\text{అంశము విలువ}}{\text{అన్ని అంశముల విలువల మొత్తము}} \times 360^0$
గణితం	50	$\frac{50}{180} \times 360^0 = 100^0$
సామాన్య శాస్త్రం	30	$\frac{30}{180} \times 360^0 = 60^0$
సాంఘిక శాస్త్రం	40	$\frac{40}{180} \times 360^0 = 80^0$
ఇంగ్లీషు	40	$\frac{40}{180} \times 360^0 = 80^0$
కళలు	20	$\frac{20}{180} \times 360^0 = 40^0$
మొత్తము	180	360^0

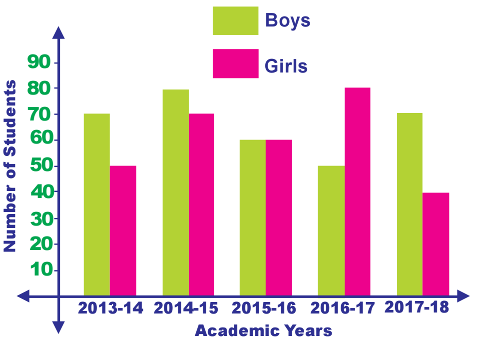
నిర్మాణ సోపానాలు:

1. ఏదేని వ్యాసార్థంతో వృత్తాన్ని గీచి, దాని కేంద్రాన్ని 'O' గా గుర్తించండి
2. వృత్త పరిధి పై ఏదైనా ఒక బిందువును 'A' గా గుర్తించండి. OAను కలపండి.
3. గణిత క్లబ్ సెక్టారును సూచించునట్లు $\angle AOB = 100^o$ ని నిర్మించండి.
4. సామాన్య శాస్త్రం క్లబ్ సెక్టారును సూచించునట్లు $\angle BOC = 60^o$ని నిర్మించండి.
5. సాంఘిక శాస్త్రం క్లబ్ సెక్టారును సూచించునట్లు $\angle COD = 80^o$ని నిర్మించండి.
6. ఇంగ్లీషు క్లబ్ సెక్టారును సూచించునట్లు $\angle DOE = 80^o$ని నిర్మించండి.
7. $\angle EOA = 40^o$ అనే సెక్టారు కోణం కళల క్లబ్‌ను సూచిస్తుంది.



Exercise - 6.4

1. In the adjacent Double bar graph, number of students of a class are shown according to academic year. Answer the following questions on the basis of this Double bar graph.



   i) In which academic year, number of girls were more than number of boys in the school?

   ii) In which academic year, number of both girls and boys in the school were equal?

   iii) What was the total number of students in the school in the academic year 2013-14 ?

2. The marks in the Mathematics and Science of five students of class 7 are given in the table. Exhibit these by the vertical Double bar graph by given information.

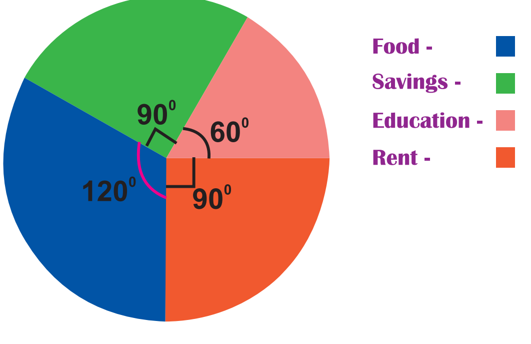
Name of student	Mathematics	Science
Praveena	50	60
Venkat	80	75
Uzma	75	70
Joseph	65	75
Ramya	75	60

3. The adjacent Pie chart gives the expenditure on various items during a month for a family. In the figure angles made by each sector at the center are given then answer the following:

   i) if the expenditure on rent is ₹3000 then how much amount they saved?

   ii) on which item the expenditure is minimum?

   iii) on which item the expenditure is maximum?



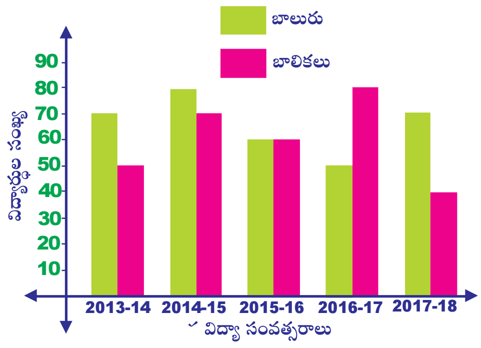
4. The following data shows the number of students opting different subjects in college.

Subjects	Botany	Mathematics	Physics	Chemistry	Economics	Commerce
Number of students	45	60	20	30	10	15

Construct a Pie diagram to represent the above data.

అభ్యాసం - 6.4

1. ప్రక్క రెండు వరుసల కమ్మీ చిత్రంలో వివిధ విద్యా సంవత్సరాలలో పాఠశాలలోని ఒక తరగతిలోని విద్యార్థుల సంఖ్య ఇవ్వబడినది. ఈ రెండు వరుసల కమ్మీ చిత్రంలోని దత్తాంశము ఉపయోగించి క్రింది వాటికి సమాధానాలు రాయండి.



i) ఏ విద్యా సంవత్సరంలో పాఠశాలలో బాలుర సంఖ్య కంటే బాలికలు సంఖ్య అధికముగా కలదు.

ii) ఏ విద్యా సంవత్సరంలో పాఠశాలలో బాలుర సంఖ్య, బాలికల సంఖ్యకు సమానము?

iii) 2013-14 విద్యాసంవత్సరంలో పాఠశాలలో మొత్తం విద్యార్థుల సంఖ్య ఎంత?

2. 7వ తరగతిలోని ఐదుగురు విద్యార్థులు గణితం మరియు సామాన్యశాస్త్రంలో సాధించిన మార్కులు క్రింద పట్టికలో ఇవ్వబడ్డాయి. ఇచ్చిన సమాచారాన్ని వినియోగించి రెండు వరుసల కమ్మీ చిత్రం గీయండి.

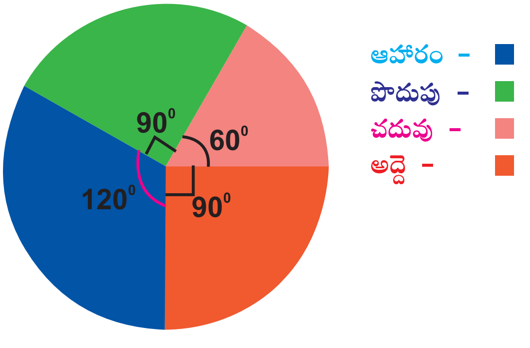
విద్యార్థి పేరు	గణితం	సామాన్య శాస్త్రం
ప్రవీణ	50	60
వెంకట్	80	75
ఉజ్మా	75	70
జోసెఫ్	65	75
రమ్య	75	60

3. ఒక కుటుంబము, నెలలో వివిధ అంశాలపై చేసిన ఖర్చుల వివరాలు ప్రక్కన ఇవ్వబడిన పై చిత్రంలో ఇవ్వబడినవి. పటంలో ప్రతీ సెక్టారు కేంద్రం వద్ద చేసే కోణం ఇవ్వబడినది అయిన కింది ప్రశ్నలకు సమాధానములు రాయండి.

i) అద్దె కొరకు పెట్టిన ఖర్చు రూ.3000, అయిన ఆ నెలలో పొదుపు ఎంత?

ii) తక్కువ ఖర్చు చేయబడిన అంశం ఏది?

iii) అధిక ఖర్చు చేయబడిన అంశం ఏది?



4. ఒక కళాశాలలో విభిన్న సబ్జెక్టులు ఎంచుకున్న విద్యార్థుల వివరాలు క్రింద ఇవ్వబడ్డాయి

సబ్జెక్టు	బోటనీ	గణితం	ఫిజిక్స్	కెమిస్ట్రీ	ఎకనామిక్స్	కామర్స్
విద్యార్థుల సంఖ్య	45	60	20	30	10	15

పైన ఇవ్వబడిన సమాచారానికి ఉపయోగించి పై చిత్రాన్ని నిర్మించండి.

Unit Exercise

1. Runs made by two bats men in 3 matches are given below.

   Kohli : 49, 98, 72

   Rohit : 64, 45, 83 then find average of runs scored by Kohli and Rohit. Whose average is higher?

2. Find mode of 38, 42, 35, 37, 45, 50, 32, 43, 43, 40, 36, 38, 43, 38 and 47? Verify whether it is Unimodel or Bimodal data?

3. The temperature in different places are 0, –5, 7, 10, 13, –1 and 41 in degree celsius. Find the Median? If another observation, '4^0C' is added to the given data, is there any change in value of Median? Explain?

4. If the range of observation $7x, 5x, 3x, 2x, x$ $(x > 0)$ is 12, then find value of 'x' and express all the observations in numerical form?

5. Birth and death rates of different states in 2015 are given below. Approximately Draw a double bar graph for the given data.

State	Birth rate (per 1000)	Death rate (per 1000)
Andhra Pradesh	17	7
Arunachal Pradesh	19	6
Tamilnadu	15	7
Jharkhand	24	6
Gujarath	20	6
Odisha	19	8

6. The following data relates to the cost of construction of a house.

Items	Cement	Steel	Bricks	Timber	Labour	Miscellaneous
Expenditure (%)	30	10	10	15	20	15

   Draw a Pie diagram to represent the above data.

Project Work

Collect the data presented in the form of Bar graph, Double bar graph and Pie charts in magazines, newspapers etc. paste them on wall magazine present in your class.

Points to Remember

1. The information either in form of pictures, numbers or words is called 'Data'.
2. Based on the method of collecting information the data is divided into two different types namely 'Primary data' and 'Secondary data'.
3. The difference between maximum and minimum values of data is its 'Range'.

C5P3C1

యూనిట్ అభ్యాసం

1. 3 మ్యాచ్‌లలో కోహ్లీ మరియు రోహిత్‌లు చేసిన పరుగులు క్రింద ఇవ్వబడ్డాయి.
   కోహ్లీ : 49, 98, 72
   రోహిత్: 64, 45, 83. కోహ్లీ మరియు రోహిత్‌లు చేసిన పరుగుల సగటు కనుగొనుము. ఎవరి సగటు ఎక్కువ?
2. 38, 42, 35, 37, 45, 50, 32, 43, 43, 40, 36, 38, 43, 38 మరియు 47ల బాహుళకము కనుగొనుము? ఇది ఏక బాహుళక దత్తాంశమా లేక ద్విబాహుళక దత్తాంశమా?
3. విభిన్న ప్రాంతాలలో ఉష్ణోగ్రతలు 0, –5, 7, 10, 13, –1 మరియు 41 డిగ్రీ సెల్సియస్ (^{0}C)లలో గలవు. అయిన ఇచ్చిన రాశుల మధ్యగతము కనుగొనుము? ఇచ్చిన దత్తాంశమునకు మరియొక రాశి '4^{0}C' ని చేర్చగా మధ్యగత విలువ మారుతుందా? వివరించండి?
4. $7x, 5x, 3x, 2x, x$ $(x > 0)$రాశుల వ్యాప్తి 12 అయిన 'x' విలువ కనుగొనుము? ఇచ్చిన రాశులను సంఖ్యా రూపంలో వ్యక్తపరచుము.
5. 2015 లో వివిధ రాష్ట్రాల జనన, మరణ రేటు (సుమారుగా) ఇవ్వబడినది. కింది సమాచారానికి రెండు వరుసల కమ్మీ చిత్రాన్ని గీయండి.

రాష్ట్రము	జననాల రేటు (ప్రతీ 1000కి)	మరణాల రేటు (ప్రతీ 1000కి)
ఆంధ్రప్రదేశ్	17	7
అరుణాచల్ ప్రదేశ్	19	6
తమిళనాడు	15	7
ఝార్ఖండ్	24	6
గుజరాత్	20	6
ఒడిస్సా	19	8

6. క్రింద పట్టికలో ఇంటి నిర్మాణము ఖర్చుకు సంబంధించిన వివరాలు ఇవ్వబడ్డాయి.

విషయము	సిమెంట్	స్టీల్	ఇటుకలు	ఇంటి కలప	కూలి	ఇతరములు
ఖర్చు(%)	30	10	10	15	20	15

పైన ఇవ్వబడిన సమాచారాన్ని ఉపయోగించి పై – చిత్రాన్ని గీయండి.

ప్రాజెక్టు పని

మ్యాగజైన్లు, దినపత్రికలలో కమ్మీ చిత్రాలు, పై చిత్రాల రూపంలో ఉన్న సమాచారాన్ని సేకరించండి. మీ తరగతి గోడపత్రికపై ప్రదర్శించండి.

గుర్తుంచుకోవాల్సిన అంశాలు

1. సంఖ్యలు, పదాలు లేదా చిత్రాల రూపంలో సేకరించిన సమాచారమే "దత్తాంశము".
2. సమాచారాన్ని సేకరించే పద్ధతిని బట్టి దత్తాంశాన్ని "ప్రాథమిక దత్తాంశము" మరియు "గౌణ దత్తాంశము" అనే రెండు రకాలుగా విభజించవచ్చు.
3. ఇచ్చిన దత్తాంశములోని గరిష్ఠ మరియు కనిష్ఠ విలువల మధ్య భేదాన్నే 'వ్యాప్తి' అంటారు.

V5K5B5

4. The most common representative or Central Tendency Value of a grouped data is average or Arithmetic Mean

5. Arithmetic Mean = $\dfrac{Sum\ of\ observations}{Number\ of\ observations}$

6. Arithmetic Mean of given data always lies between the lowest and highest observations in the data.

7. The observation which occurs most frequently in the given data is 'Mode'.

8. Data having only one mode is Unimodal data and data having two modes is Bimodal data.

9. The middle most value of the data when the observations are arranged in either ascending or descending order is called Median.

10. If number of observations(n) is odd then Median is $\left(\dfrac{n+1}{2}\right)^{th}$ observations.

11. If number of observations(n) is even then median is average of $\left(\dfrac{n}{2}\right)^{th}$ and $\left(\dfrac{n}{2}+1\right)^{th}$ observations.

12. Representation of numerical data by using bars of uniform width is Bar graph.

13. Representation of two sets of numerical data on the same graph by using bars of uniform width is Double bar graph.

14. A Pie chart is the representation of the numerical data by sectors of the circle such that angle of each sector (area of sector) is proportional to value of the given data.

15. Angle of sector = $\dfrac{Value\ of\ the\ item}{Sum\ of\ the\ values\ of\ all\ items} \times 360^0$.

Letter Series

Letter series is a logical arrangement of English alphabetical letters arranged in a specific pattern. In this series of letters, groups of letters, *combination of letters and numbers* are given. Each letter or group is called term. The terms of a series are arranged in a particular order or pattern. We have to identify the pattern, and find the missing term (next term) from the alternatives, which will satisfy the pattern. Assigning numbers to the alphabets is very useful to practice letter series.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Example 1: B, D, F, H, ---

1) I 2) K 3) J 4) L

B D F H J
↑ ↑ ↑ ↑ ↑
2 4 6 8 10

Answer : J

Example 2: A, B, D, E, G, ---

1) H 2) I 3) K 4) F

A B D E G H
1 2 4 5 7 8
+1 +2 +1 +2 +1

Answer : H

4. సర్వసాధారణంగా ప్రాతినిధ్య విలువ లేదా కేంద్రీయ స్థాన విలువగా “సగటు” లేదా “అంకగణిత సగటు” ను ఉపయోగిస్తారు.

5. అంకగణిత సగటు = $\dfrac{\text{రాశుల మొత్తము}}{\text{రాశుల సంఖ్య}}$

6. అంకగణిత సగటు ఎల్లప్పుడూ అత్యల్ప మరియు అత్యధిక పరిశీలనా విలువల మధ్య ఉంటుంది.

7. దత్తాంశములో ఎక్కువ సార్లు పునరావృతం అయ్యే రాశిని “బాహుళకం’ అంటారు.

8. ఒకే ఒక రాశి బాహుళకముగా గల దత్తాంశమును “ఏక బాహుళక దత్తాంశము” అని మరియు రెండు రాశులు బాహుళకముగా గల దత్తాంశమును “ద్వి బాహుళక దత్తాంశము” అంటారు.

9. దత్తాంశములోని రాశులను ఆరోహణ లేదా అవరోహణ క్రమములో అమర్చగా, ఆ అమరికలోని మధ్యమ విలువను “మధ్యగతం” అంటారు.

10. దత్తాంశములో రాశుల సంఖ్య(n) బేసి సంఖ్య అయిన మధ్యగతము $\left(\dfrac{n+1}{2}\right)$వ పదము అగును.

11. ఇచ్చిన దత్తాంశములో రాశుల సంఖ్య(n) సరి సంఖ్య అయిన మధ్యగతము, $\left(\dfrac{n}{2}\right)$వ మరియు $\left(\dfrac{n}{2}+1\right)$వ పదాల సరాసరి.

12. దత్తాంశమును సమాన వెడల్పుగల ఉన్న కమ్మీల రూపములో ప్రదర్శించుటనే కమ్మీ చిత్రం అంటారు.

13. ఏకరీతి వెడల్పు కలిగిన కమ్మీలను ఉపయోగించడం ద్వారా ఒకే గ్రాఫ్ మీద రెండు విభిన్న దత్తాంశములను ప్రదర్శించుటను డబుల్ బార్ గ్రాఫ్ లేదా రెండు వరుసల కమ్మీ చిత్రం అంటారు.

14. వృత్తంను సెక్టార్లుగా విభజించుట ద్వారా దత్తాంశమును ప్రదర్శించుటనే వృత్తరేఖా చిత్రము లేదా పై చిత్రము అంటాము. పై చిత్రంలో ప్రతీ సెక్టారు వృత్త కేంద్రం వద్ద చేసే కోణము (సెక్టారు వైశాల్యము) అది సూచించే అంశ విలువకు అనులోమానుపాతంలో ఉంటుంది.

15. సెక్టారు కోణం = $\dfrac{\text{అంశము విలువ}}{\text{అన్ని అంశముల విలువ మొత్తము}} \times 360^0$

అక్షర శ్రేణి

అక్షరశ్రేణి అనేది ఒక నిర్దిష్ట క్రమంలో అమర్చబడ్డ ఇంగ్లీష్ అక్షరమాల యొక్క తార్కిక అమరిక. వీటిలో అక్షరాలశ్రేణి (అక్షరాలు), అక్షరాల సమూహాలు లేదా అక్షరాలు మరియు సంఖ్యల కలయిక ఇవ్వబడింది. ప్రతి అక్షరం లేదా అక్షరాల సమూహంను పదం అని అంటారు. శ్రేణిలోని పదాలు ఒక నిర్దిష్ట క్రమంలో లేదా నమూనాలో అమర్చబడ్డాయి. మనం శ్రేణిని గుర్తించి ఖాళీలో, ఆ శ్రేణిని సంతృప్త పరచే పదము (తరువాత పదం) ఆ ప్రత్యామ్నాయాల నుండి కనుగొనాలి. అక్షరాలశ్రేణిని సాధన చేయడానికి అక్షరాలకు నెంబర్లు కేటాయించడం ఎంతో ఉపయోగకరంగా ఉంటుంది.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

ఉదాహరణ 1: B, D, F, H, ---

1) I 2) K 3) J 4) L

B D F H J
↑ ↑ ↑ ↑ ↑
2 4 6 8 10

జవాబు 'J'

ఉదాహరణ 1: A, B, D, E, G, ---

1) H 2) I 3) K 4) F

A B D E G H
1 2 4 5 7 8
+1 +2 +1 +2 +1

జవాబు 'H'

Example 3: Z, X, U, Q

1) M 2) K 3) N 4) L

Z X U Q L
26 24 21 17 12
-2 -3 -4 -5

Answer : L

Example 4: QPO, NML, KJI, … EDC

1) KL 2) GHI 3) CAB 4) HGF

This series consists of letters in a reverse alphabetical order so, answer should be 'HGF'.

Example 5: AB, DE, HI, MN, …

1) TV 2) TU 3) ST 4) RS

AB C DE FG HI JKL MN OPQR ST
1 2 3 4

So, in the series next word is 'ST'

Example 6: AB, EF, IJ, MN, …

1) QR 2) OP 3) XY 4) PQ

AB CD EF GH IJ KL MN OP QR
1 2 3 4

So, in the series next word is 'QR'

Example 7: B2, D4, F6, H8, J10,…….

1) L12 2) K11 3) N14 4) M13

Alternate letters with their assigned numbers. So, answer is L12

Example 8: AFK, BGL, CHM, DIN

1) GJO 2) FIO 3) EJO 4) GJN

Each group next letter is forwarding 5th letter. So, answer is 'EJO'

Model Problems :

In the following alphabetical series, a term (next term) is missing. Choose the missing term from the options.

1.	B, F, J, N, R, V, …	a) Z	b) W	c) X	d) W
2.	A, C, E, G, I, K, …	a) P	b) O	c) N	d) M
3.	M, O, R,T, ..	a) W	b) U	c) V	d) Q
4.	U, S, P, L, ...	a) F	b) G	c) H	d) I
5.	ZA, YB, XC, WD, ...	a) UE	b) EV	c) VE	d) SH
6.	AM, BO, CQ, DS, EU, …	a) WF	b) FU	c) GV	d) FW
7.	ZY, XV, UR, QM, …	a) LG	b) LI	c) LH	d) KJ
8.	AC, DF, GI, JL, …	a) NO	b) MO	c) MN	d) NP
9.	DN, EM, FL, GK, HJ, …	a) IK	b) GI	c) IJ	d) II
10.	CBA, STU, FED, VWX, …	a) IHG	b) GHI	c) IJK	d) YZA
11.	AZC, DYF, GXI, JWL, …	a) OVM	b) UNV	c) MVO	d) MNO
12.	ABK, CDL, EFM, GHN, …	a) JIO	b) IJO	c) MNO	d) ONM
13.	A2C, D5F, G8I, J11L, …	a) M14O	b) M12O	c) N15P	d) N12P
14.	A, CD, HIJ, PQRS, …	a) ZABCD	b) ZYXW	c) ABCDE	d) RSTUV
15.	A, BC, DEF, GHIJ, …	a) KLMNP	b) LMNOP	c) KLMNO	d) JKLMN

ఉదాహరణ 3: Z, X, U, Q

1) M 2) K 3) N 4) L

Z X U Q L
26 24 21 17 12
-2 -3 -4 -5

జవాబు 'L'

ఉదాహరణ 4: QPO, NML, KJI, … EDC

1) KL 2) GHI 3) CAB 4) HGF

ఇచ్చిన శ్రేణిలోని అక్షరాలు ఇంగ్లీష్ అక్షరమాల యొక్క వ్యతిరేక (అపసవ్య) దిశ రాయబడ్డాయి కాబట్టి జవాబు 'HGF'అగును.

ఉదాహరణ 5: AB, DE, HI, MN, …

1) TV 2) TU 3) ST 4) RS

AB C DE FG HI JKL MN OPQR ST
1 2 3 4

కాబట్టి, శ్రేణి లోని తరువాత వచ్చే పదం 'ST'

ఉదాహరణ 6: AB, EF, IJ, MN, …

1) QR 2) OP 3) XY 4) PQ

AB CD EF GH IJ KL MN OP QR
1 2 3 4

కాబట్టి, శ్రేణిలోని తరువాత వచ్చే పదం 'QR'

ఉదాహరణ 7: B2, D4, F6, H8, J10,…….

1) L12 2) K11 3) N14 4) M13

అక్షరాలు మరియు వాటికి కేటాయించిన సంఖ్యలు (ఒకటి విడిచి ఒకటి) కాబట్టి జవాబు 'L12'

ఉదాహరణ 8: AFK, BGL, CHM, DIN

1) GJO 2) FIO 3) EJO 4) GJN

ప్రతీ సమూహంలో అక్షరం మరియు దాని తరువాత వచ్చే యొక్క 5 వ అక్షరం కాబట్టి జవాబు 'EJO'

మాదిరి సమస్యలు:

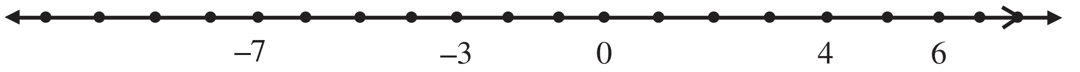
దిగువ అక్షరశ్రేణిలో, ఖాళీలలో ఉండవలసిన పదం (తరువాతపదం)ను ఇచ్చిన ఐచ్ఛికాలనుండిఎంచుకొని పూరించండి.

1.	B, F, J, N, R, V, …	a) Z	b) W	c) X	d) W
2.	A, C, E, G, I, K, …	a) P	b) O	c) N	d) M
3.	M, O, R,T, ..	a) W	b) U	c) V	d) Q
4.	U, S, P, L, ….	a) F	b) G	c) H	d) I
5.	ZA, YB, XC, WD, ...	a) UE	b) EV	c) VE	d) SH
6.	AM, BO, CQ, DS, EU, …	a) WF	b) FU	c) GV	d) FW
7.	ZY, XV, UR, QM, …	a) LG	b) LI	c) LH	d) KJ
8.	AC, DF, GI, JL, …	a) NO	b) MO	c) MN	d) NP
9.	DN, EM, FL, GK, HJ, …	a) IK	b) GI	c) IJ	d) II
10.	CBA, STU, FED, VWX, …	a) IHG	b) GHI	c) IJK	d) YZA
11.	AZC, DYF, GXI, JWL, …	a) OVM	b) UNV	c) MVO	d) MNO
12.	ABK, CDL, EFM, GHN, …	a) JIO	b) IJO	c) MNO	d) ONM
13.	A2C, D5F, G8I, J11L, …	a) M14O	b) M12O	c) N15P	d) N12P
14.	A, CD, HIJ, PQRS, …	a) ZABCD	b) ZYXW	c) ABCDE	d) RSTUV
15.	A, BC, DEF, GHIJ, …	a) KLMNP	b) LMNOP	c) KLMNO	d) JKLMN

CHAPTER - 1

Review Exercise :

1) i) + ₹2000   ii) –350 ft.   iii) + 8848 m   iv) –14°C

2) 

3) i) Descending order : 0,–1, –6, –9, –10   Asending order : –10, –9, –6, –1, –0

ii) Descending order : 10, 6, 5, –3, –6, –9   Asending order : –9, –6, –3, 5, 6, 10

iii) Descending order : 2, 0, –15, –20, –35   Asending order : –35, –20, –15, 0, 2

4) i) 1   ii) –8   iii) 14   iv) –5

v) 7   vi) –103   vii) 53   viii) –10

5) 4^0C   6) –33ft   7) Loss, ₹50

Exercise 1.1

1) i) 35   ii) –54   iii) –36   iv) –56

v) 124   vi) 84   vii) –441   viii) –105

2) i) $2 \times (-5)$ ii) $(-6) \times (-7)$ iii) $(-3) \times (-21)$ iv) $6 \times (-16)$

v) $(-8) \times (-5)$

4) –15m   5) –30 inches   6) Profit, ₹3000   7) Loss, ₹2000

8) i) 5   ii) –7   iii) –8   iv) –5

v) –6   vi) –1

Exercise 1.2

1) i) –6   ii) –2   iii) –3   iv) –2

v) –4   vi) 6   vii) –10   viii) –6

ix) 2   x) 1

2) 11   3) ₹22,000   4) 9PM, -14^0C   5) 119 Kgs.

6) i) 10   ii) 20

Exercise 1.3

1) i) Additive commutative property   ii) Multiplicative identity property

iii) Multiplicative Associative property   iv) Distributive over addition

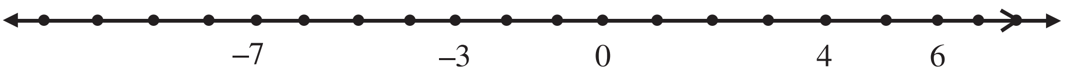
v) Multiplicative Closure property   vi) Additive Identity property

అధ్యాయం - 1

పునర్విమర్శ అభ్యాసం:

1) i) + ₹2000 ii) –350 ft. iii) + 8848 m iv) –14°C

2)



3) i) అవరోహణ క్రమం: 0, –1, –6, –9, –10 ఆరోహణ క్రమం : –10, –9, –6, –1, –0

ii) అవరోహణ క్రమం: 10, 6, 5, –3, –6, –9 ఆరోహణ క్రమం : –9, –6, –3, 5, 6, 10

iii) అవరోహణ క్రమం: 2, 0, –15, –20, –35 ఆరోహణ క్రమం : –35, –20, –15, 0, 2

4) i) 1 ii) –8 iii) 14 iv) –5

v) 7 vi) –103 vii) 53 viii) –10

5) 4^0C 6) –33ft 7) నష్టం, ₹50

అభ్యాసం - 1.1

1) i) 35 ii) –54 iii) –36 iv) –56

v) 124 vi) 84 vii) –441 viii) –105

2) i) 2 × (–5) ii) (–6) × (–7) iii) (–3) × (–21) iv) 6 × (–16)

v) (–8) × (–5)

4) –15m 5) –30 inches 6) లాభం, ₹3000 7) నష్టం, ₹2000

8) i) 5 ii) –7 iii) –8 iv) –5

v) –6 vi) –1

అభ్యాసం - 1.2

1) i) –6 ii) –2 iii) –3 iv) –2

v) –4 vi) 6 vii) –10 viii) –6

ix) 2 x) 1

2) 11 3) ₹22,000 4) 9PM, $–14^0$C 5) 119 Kgs.

6) i) 10 ii) 20

అభ్యాసం - 1.3

1) i) సంకలన స్థిత్యంతర ధర్మం ii) గుణకార తత్సమాంసం

iii) గుణకార సహచర ధర్మం iv) సంకలనం పై విభాగధర్మం

v) గుణకార సంవృత ధర్మం vi) సంకలన తత్సమాంసం

2) i) positive ii) negative

3) i) 0 ii) 2 iii) 3, –2 iv) 1
v) 5, 9

4) i) False ii) False iii) True iv) True
v) False

5) i) –1100 ii) –150

6) Integers are not associative under subtraction

Exercise 1.4

1) i) 52 ii) 0 iii) 17 iv) –10
v) 8

2) i) 18 ii) –2 iii) –9 iv) 7
v) 71

3) i) False ii) True iii) False iv) True

4) i) –3 ii) –4 iii) –30

Unit Exercise

1) i) –8 ii) –350 iii) +120 iv) 148
v) 7 vi) –2 vii) 7 viii) –7

2) i) –3 ii) –6 iii) 8 iv) –12
v) –25 vi) –7 vii) –90 viii) –144

4) Profit, ₹25 5) 190 calories 6) –3125

7) i) 0 ii) –43 iii) 42

8) i) 700 ii) 150 iii) 150 iv) 35
v) 10 – p vi) y – 7

1. Integers (Number series -1)									
Practice questions									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
b	c	d	a	c	b	d	b	a	d
11	12	13	14	15					
c	c	c	b	b					

2) i) ధనాత్మకం ii) ఋణాత్మకం

3) i) 0 ii) 2 iii) 3, –2 iv) 1

v) 5, 9

4) i) తప్పు ii) తప్పు iii) ఒప్పు iv) ఒప్పు

v) తప్పు

5) i) –1100 ii) –150

6) పూర్ణ సంఖ్యలు వ్యవకలనం పై సహచర ధర్మం పాటించవు

అభ్యాసం - 1.4

1) i) 52 ii) 0 iii) 17 iv) –10
v) 8

2) i) 18 ii) –2 iii) –9 iv) 7
v) 71

3) i) తప్పు ii) ఒప్పు iii) తప్పు iv) ఒప్పు

4) i) –3 ii) –4 iii) –30

యూనిట్ అభ్యాసం

1) i) –8 ii) –350 iii) +120 iv) 148

v) 7 vi) –2 vii) 7 viii) –7

2) i) –3 ii) –6 iii) 8 iv) –12

v) –25 vi) –7 vii) –90 viii) –144

4) లాభం, ₹25 5) 190 కెలరీలు 6) –3125

7) i) 0 ii) –43 iii) 42

8) i) 700 ii) 150 iii) 150 iv) 35

v) 10 – p vi) $y - 7$

1. Integers (Number series -1)									
Practice questions									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
b	c	d	a	c	b	d	b	a	d
11	12	13	14	15					
c	c	c	b	b					

CHAPTER - 2

Review Exercise :

1) i) $\frac{1}{2}$ ii) $\frac{5}{3}, 1\frac{2}{3}$ iii) $\frac{11}{9}, 1\frac{2}{9}$ iv) $\frac{23}{25}$

v) $\frac{19}{100}$ vi) $\frac{99}{70}, 1\frac{29}{70}$

2) i) Ascending order $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{9}{2}, \frac{17}{2}$ ii) Ascending order $\frac{5}{10}, \frac{7}{10}, \frac{11}{10}, \frac{6}{5}, \frac{19}{5}$

iii) Ascending order $\frac{7}{6}, \frac{5}{3}, \frac{8}{3}, \frac{11}{4}, 3\frac{1}{4}$

3) i) $\frac{5}{2}$ ii) $1\frac{5}{12}$ iii) $1\frac{27}{40}$ iv) $1\frac{1}{6}$

4) i) $\frac{3}{4}$ ii) $\frac{5}{12}$ iii) $8\frac{1}{28}$ iv) 8

5) i) $\frac{1}{4}$ ii) $3\frac{11}{15}$ iii) 6 iv) $1\frac{59}{62}$

Exercise - 2.1

1) 9kg. 2) 15 cm. 3) 9 km. 4) 1 0 1 sq.m.

5) ₹24 6) 50 km. 7) $\frac{1}{5}$ kg or 200gm. 8) 60

Exercise - 2.2

1) i) 140.4 ii) 6131.25 iii) 746.06 iv) 20.16

v) 50.325

2) i) 2310.4 ii) 1000 iii) 0.02105 iv) 923.4

v) 1000 vi) 5.9001

3) i) 41.31 ii) 17.06535 iii) 1.1889 iv) 6.4449

v) 5.0256

4) 17.5 hours 5) 14.31Sq.cm. 6) ₹7836 7) ₹213.50

8) ₹68

అధ్యాయం - 2

పునర్విమర్శ అభ్యాసం:

1) i) $\frac{1}{2}$ ii) $\frac{5}{3}, 1\frac{2}{3}$ iii) $\frac{11}{9}, 1\frac{2}{9}$ iv) $\frac{23}{25}$

v) $\frac{19}{100}$ vi) $\frac{99}{70}, 1\frac{29}{70}$

2) i) ఆరోహణ క్రమం $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{9}{2}, \frac{17}{2}$ ii) ఆరోహణ క్రమం $\frac{5}{10}, \frac{7}{10}, \frac{11}{10}, \frac{6}{5}, \frac{19}{5}$

iii) ఆరోహణ క్రమం $\frac{7}{6}, \frac{5}{3}, \frac{8}{3}, \frac{11}{4}, 3\frac{1}{4}$

3) i) $\frac{5}{2}$ ii) $1\frac{5}{12}$ iii) $1\frac{27}{40}$ iv) $1\frac{1}{6}$

4) i) $\frac{3}{4}$ ii) $\frac{5}{12}$ iii) $8\frac{1}{28}$ iv) 8

5) i) $\frac{1}{4}$ ii) $3\frac{11}{15}$ iii) 6 iv) $1\frac{59}{62}$

అభ్యాసం - 2.1

1) 9కి.గ్రా. 2) 15 సెం.మీ. 3) 9 కి.మీ. 4) 101 చ.సెం.మీ.

5) ₹24 6) 50 కి.మీ. 7) $\frac{1}{5}$ kg or 200gm. 8) 60

అభ్యాసం - 2.2

1) i) 140.4 ii) 6131.25 iii) 746.06 iv) 20.16

v) 50.325

2) i) 2310.4 ii) 1000 iii) 0.02105 iv) 923.4

v) 1000 vi) 5.9001

3) i) 41.31 ii) 17.06535 iii) 1.1889 iv) 6.4449

v) 5.0256

4) 17.5 గంటలు 5) 14.31చ.సెం.మీ. 6) ₹7836 7) ₹213.50

8) ₹68

Exercise - 2.3

1) i) 56.361 ii) 1000 iii) 2016.4 v) 1.23 vi) 1000

vi) 590.01

2) i) 2.755 ii) 12.8 iii) 9.565 iv) 51.1 v) 0.1401

vi) 3.33 vii) 2 viii) 0.91 ix) 25 x) 9.7

3) i) 391.2 ii) 3.23 iii) 0.41 iv) 256 v) 0.2

vi) 48.3 vii) 30 viii) 25.4 ix) 4 x) 270.5

4) i) 6.59 ii) 0.72 iii) 4

5) 30.9 Km. 6) 59.5 hours 7) ₹5.15 8) ₹2.65

Exercise - 2.4

1) i) $-\frac{15}{9}$ ii) $-\frac{20}{12}$ 2) i) $\frac{16}{36}$ ii) $\frac{40}{90}$

3) $\frac{2}{3}=\frac{6}{9}=\frac{8}{12}$; $\frac{5}{4}=\frac{10}{8}=\frac{15}{12}$; $-\frac{4}{6}=-\frac{2}{3}$; $\frac{0}{3}=\frac{0}{5}$ 4) $-\frac{2}{9}$, 0, $\frac{1}{3}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{2}{3}$

6) i) $-\frac{2}{7}>\frac{3}{7}$ ii) $\frac{5}{9}<\frac{5}{8}$ iii) $\frac{-13}{12}>\frac{-7}{6}$

7) i) True ii) False iii) True iv) True

8) Yes, $\frac{-3}{2}$ lies between –1 and –2.

Exercise - 2.5

1) $\frac{37}{14}$ 2) ₹94 3) ₹442.75 4) 9.5 5) -5.5^0C

6) 1 7) $\frac{-5}{6}$

Unit Exercise

1) i) d ii) b iii) b iv) d

అభ్యాసం - 2.3

1) i) 56.361 ii) 1000 iii) 2016.4 v) 1.23 vi) 1000
vi) 590.01

2) i) 2.755 ii) 12.8 iii) 9.565 iv) 51.1 v) 0.1401
vi) 3.33 vii) 2 viii) 0.91 ix) 25 x) 9.7

3) i) 391.2 ii) 3.23 iii) 0.41 iv) 256 v) 0.2
vi) 48.3 vii) 30 viii) 25.4 ix) 4 x) 270.5

4) i) 6.59 ii) 0.72 iii) 4

5) 30.9 Km. 6) 59.5 hours 7) ₹5.15 8) ₹2.65

అభ్యాసం - 2.4

1) i) $-\frac{15}{9}$ ii) $-\frac{20}{12}$ 2) i) $\frac{16}{36}$ ii) $\frac{40}{90}$

3) $\frac{2}{3}=\frac{6}{9}=\frac{8}{12}$; $\frac{5}{4}=\frac{10}{8}=\frac{15}{12}$; $-\frac{4}{6}=-\frac{2}{3}$; $\frac{0}{3}=\frac{0}{5}$ 4) $-\frac{2}{9}$, 0, $\frac{1}{3}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{2}{3}$

6) i) $-\frac{2}{7}>\frac{3}{7}$ ii) $\frac{5}{9}<\frac{5}{8}$ iii) $\frac{-13}{12}>\frac{-7}{6}$

7) i) ఒప్పు ii) తప్పు iii) ఒప్పు iv) ఒప్పు

8) అవును, $\frac{-3}{2}$, –1 మరియు –2 ల మధ్య ఉంటుంది.

అభ్యాసం - 2.5

1) $\frac{37}{14}$ 2) ₹94 3) ₹442.75 4) 9.5 5) -5.5^{0}C

6) 1 7) $\frac{-5}{6}$

యూనిట్ అభ్యాసం

1) i) d ii) b iii) b iv) d

2 i)	Rational	ii)	0.0121	iii)	$-\frac{5}{2}$	iv)	$-\frac{4}{6}$ or $-\frac{6}{9}$ etc.
3) i)	13.23	ii)	54.87035	iii)	26.7435	iv)	5.1876
4) i)	153.1	ii)	15.6333333	iii)	– 0.52	iv)	14.63636363
5)	–0.02	6)	$-\frac{3}{7}$	7)	40 Km.	8)	₹150
9)	₹1058.125	12)	$-\frac{13}{6}$				

2. Fractions, decimals and rational numbers (Number series -2)									
Practice questions									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
b	c	d	a	c	a	b	a	d	c
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
c	a	b	d	a	c	b	a	d	b

CHAPTER - 3

Exercise - 3.1

1) i) $x - 5 = 14$ ii) $8y + 3 = -5$ iii) $\frac{3z}{4} + 3 = 7$ iv) $3m - 5 = 11$

v) $3x = 120$ vi) $4a = 14$

2) i) A number 'm' is decreased by 5 is 12 ii) one third of 'a' is 4

iii) 7 is added to 4 times of 'x' is 15 iv) three times of 'y' is subtracted from 2 is 11

3) i) Yes ii) No iii) Yes iv) No

4) i) $x = 1$ ii) $y = 6$

Exercise - 3.2

1) i) $m = 6$ ii) $n = 9$ iii) $x = 7$ iv) $y = 5$

2) i) $x = 6$ ii) $b = -14$ iii) $x = 5$ iv) $a = 5$

v) $m = -3$ vi) $p = -7$ vii) $x = \frac{16}{9}$ viii) $n = 3$

ix) $k = 3$ x) $a = 0$

Exercise - 3.3

1) i) $x = 7$ ii) $y = 4$ iii) $a = 3.8$ iv) $b = -\frac{7}{4}$

2 i) అకరణీయం ii) 0.0121 iii) $-\frac{5}{2}$ iv) $-\frac{4}{6}$ or $-\frac{6}{9}$ etc.

3) i) 13.23 ii) 54.87035 iii) 26.7435 iv) 5.1876

4) i) 153.1 ii) 15.6333333 iii) – 0.52 iv) 14.63636363

5) –0.02 6) $-\frac{3}{7}$ 7) 40 Km. 8) ₹150

9) ₹1058.125 12) $-\frac{13}{6}$

2. Fractions, decimals and rational numbers (Number series -2)									
Practice questions									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
b	c	d	a	c	a	b	a	d	c
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
c	a	b	d	a	c	b	a	d	b

అధ్యాయం - 3

అభ్యాసం - 3.1

1) i) $x - 5 = 14$ ii) $8y + 3 = -5$ iii) $\frac{3z}{4} + 3 = 7$ iv) $3m - 5 = 11$

v) $3x = 120$ vi) $4a = 14$

2) i) 'm' నుండి 5 తీసివేసిన ఫలితం 12.

ii) 'a' లో మూడవ భాగం 4 వస్తుంది.

iii) 'x' యొక్క 4 రెట్లుకి 7 కలిపితే 15 వస్తుంది.

iv) 2 నుండి 'y' యొక్క 3 రెట్లును తగ్గించగా 11 వస్తుంది.

3) i) అవును ii) కాదు iii) అవును iv) కాదు

4) i) $x = 1$ ii) $y = 6$

అభ్యాసం - 3.2

1) i) $m = 6$ ii) $n = 9$ iii) $x = 7$ iv) $y = 5$

2) i) $x = 6$ ii) $b = -14$ iii) $x = 5$ iv) $a = 5$

v) $m = -3$ vi) $p = -7$ vii) $x = \frac{16}{9}$ viii) $n = 3$

ix) $k = 3$ x) $a = 0$

అభ్యాసం - 3.3

1) i) $x = 7$ ii) $y = 4$ iii) $a = 3.8$ iv) $b = -\frac{7}{4}$

v) $p = \frac{60}{7}$ vi) $q = 12$ vii) $m = -9$ viii) $n = 30$

ix) $k = 3$ x) $a = 0$

2) i) $p = 10$ ii) $q = \frac{9}{2}$ iii) $x = 18$ iv) $y = -0.7$ v) $r = 0$

vi) $t = 4$ vii) $k = 2$ viii) $m = -3$ ix) $n = 2$ x) $x = 1$

Exercise - 3.4

1) $x = 1.7m$ 2) 38 3) 32 4) $x = 7$cm. 5) –40ºF

6) ₹49 7) smaller 10, larger 17 8) 16, 18, 20 9) girls 12

10) Mary age 20 years, Joseph age 12 years

11) ₹5 notes 80, ₹10 notes 10

12) ₹1305, ₹2695

13) length 11m, breadth 5m

14) White balls 3, Blue balls 6, Red balls 18

15) Cuboid = 54 , Cube = 90

Unit Exercise

1) i) c ii) b iii) a iv) c v) d

2) i) 18 ii) transposition iii) $4x = 60$ iv) No solution v) 8

3) i) Yes ii) No 4) k = 4

5) i) 7 more than 2 times of '*m*' is 21

ii) one seventh of '*n*' is 4

6) i) $x = 7$ ii) $m = 3$

7 i) $a = -\frac{4}{9}$ ii) $y = 5$

8) 7 9) 4 10) 10m 11) 11years, 8 years

12) length 35m, breadth 15m

13) rice 24kg, wheat 6kg.

14) 43 15) 280 Km.

3. Simple Equations (Arithmetic Operations)									
Practice questions									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	c	d	d	c	b	a	a	b	c

v) $p = \frac{60}{7}$ vi) $q = 12$ vii) $m = -9$ viii) $n = 30$

ix) $k = 3$ x) $a = 0$

2) i) $p = 10$ ii) $q = \frac{9}{2}$ iii) $x = 18$ iv) $y = -0.7$ v) $r = 0$

vi) $t = 4$ vii) $k = 2$ viii) $m = -3$ ix) $n = 2$ x) $x = 1$

అభ్యాసం - 3.4

1) $x = 1.7m$ 2) 38 3) 32 4) $x = 7$ సెం.మీ. 5) –40ºF

6) ₹49 7) చిన్నది 10, పెద్దది 17 8) 16, 18, 20 9) 12 మంది బాలికలు

10) మేరీ వయస్సు 20 సం, జోసెఫ్ వయస్సు 12 సం

11) ₹5 నోట్ల సంఖ్య 80, ₹10 నోట్ల సంఖ్య 10

12) ₹1305, ₹2695

13) పొడవు 11 మీ. వెడల్పు 5మీ.

14) తెల్ల బంతుల సంఖ్య 3, నీలం బంతుల సంఖ్య 6, ఎరుపు బంతుల సంఖ్య 18

15) దీర్ఘ ఘనం = 54, ఘనం = 90

యూనిట్ అభ్యాసం

1) i) c ii) b iii) a iv) c v) d

2) i) 18 ii) పక్షాంతరం iii) $4x = 60$ iv) సాధన లేదు. v) 8

3) i) Yes ii) No 4) k = 4

5) i) 'm' యొక్క 2 రెట్లుకు 7 కలిపిన ఫలితం 21 అవుతుంది.

ii) 'n' లో 7 భాగం 4 అవుతుంది.

6) i) $x = 7$ ii) $m = 3$

7 i) $a = -\frac{4}{9}$ ii) $y = 5$

8) 7 9) 4 10) 10m 11) 11 సంవత్సరాలు, 8 సంవత్సరాలు

12) పొడవు 35 మీ. వెడల్పు 15మీ.

13) బియ్యం 24 కె.జిలు, గోధుమలు 6 కె.జి.లు

14) 43 15) 280 Km.

3. Simple Equations (Arithmetic Operations)									
Practice questions									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	c	d	d	c	b	a	a	b	c

CHAPTER - 4

Review Exercise :

1) Points A, B, C, D, E ; Line segments $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{AB}$, $\overline{BD}$, $\overline{DE}$, $\overline{AD}$, $\overline{AE}$, $\overline{BE}$

Rays $\overline{BA}$, $\overline{DA}$ $\overline{BE}$, $\overline{DE}$, $\overline{AE}$, $\overline{EA}$; Lines $\overline{AE}$

2) l, p ; l, m, n 4) ∠POQ, ∠POR, ∠POS, ∠QOR, ∠QOS, ∠ROS

5) Acute angle, Right angle, Obtuse angle, Straight angle, Reflex angle

6) 90º 8) l||m ; $l \perp n$, $m \perp n$ 9) ∠AOB = 40º

Exercise - 4.1

1) Complementary angles (ii) ; Supplementary angles (iv), (v)

2) 36º, 54º 3) 6º 4) 45º, 45º 6) Sujatha 7) 30º

8) No, one angle need not be obtuse angle 9) 70º

10) Yes, sum of two obtuse angles are greater than 180º

Exercise - 4.2

1) ∠KOQ, ∠QOP; ∠QOP, ∠POM; ∠MOL, ∠LOK; ∠LOK, ∠KOQ

5) ∠AOC, ∠COD; ∠COD, ∠DOB; ∠AOC, ∠COB; ∠AOD, ∠DOB

6) i) Yes ii) No, the sum of angles 98º + 102º = 200º

8) 50º 9) Rositha

Exercise - 4.3

1) ∠AOB, ∠DOE; ∠BOC, ∠EOF; ∠COD, ∠AOF; ∠DOE = 45º

2) No, ∠SOR is not a straight angle 4) 160º, 20º, 160º

5) ∠AOE, ∠COD; ∠AOC, ∠DOE 6) 65º

Exercise - 4.4

1) ∠1 = 135º, ∠2 = 45º, ∠4 = 45º, ∠5 = 135º, ∠6 = 45º, ∠7 = 45º, ∠8 = 135º

2) 65º 3) 120º, 75º 4) 20º, 33º ; ∠AEC = 53º 5) Yes

6) 60º, 80º, 40º 7) 100º, 80º, 80º 8) 360º

9) AL||EH; BK||DI; CJ||FG

Unit Exercise

1) 54º, 144º, 324º

2) ∠AOB, ∠BOC; ∠BOC, ∠COD; ∠COD, ∠DOE; ∠DOE, ∠EOF

3) 80º 4) 18º, 36º, 54º, 72º

6) I don't agree, sum of two obtuse angles is less than 360º.

అధ్యాయం - 4

పునర్విమర్శ అభ్యాసం:

1) బిందువులు A, B, C, D, E ; రేఖా ఖండాలు $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{AB}$, $\overline{BD}$, $\overline{DE}$, $\overline{AD}$, $\overline{AE}$, $\overline{BE}$

కిరణాలు $\overline{BA}$, $\overline{DA}$ $\overline{BE}$, $\overline{DE}$, $\overline{AE}$, $\overline{EA}$; రేఖలు $\overline{AE}$

2) l, p ; l, m, n   4) ∠POQ, ∠POR, ∠POS, ∠QOR, ∠QOS, ∠ROS

5) అల్పకోణము, లంబకోణము, అధికకోణము, సరళకోణము, పరావర్తన కోణము

6) 90^o 8) l||m ; $1 \perp n, m \perp n$ 9) $\angle AOB = 40^o$

అభ్యాసం - 4.1

1) పూరక కోణాలు (ii) సంపూరకాలు (iv), (v)

2) $36^o, 54^o$ 3) 6^o 4) $45^o, 45^o$ 6) సుజాత   7) 30^o

8) కాదు, ఒక కోణం అధికకోణం కానవసరంలేదు.   9) 70^o

10) అవును, రెండు అధిక కోణాలు మొత్తం 180^0 కంటే ఎక్కువ

అభ్యాసం - 4.2

1) ∠KOQ, ∠QOP;   ∠QOP, ∠POM; ∠MOL, ∠LOK;   ∠LOK, ∠KOQ

5) ∠AOC, ∠COD;   ∠COD, ∠DOB;   ∠AOC, ∠COB;   ∠AOD, ∠DOB

6) i) అవును   ii) కాదు, కోణాలు మొత్తం $98^o + 102^o = 200^o$

8) 50^o 9) రోషిత

అభ్యాసం - 4.3

1) ∠AOB, ∠DOE; ∠BOC, ∠EOF;   ∠COD, ∠AOF; $\angle DOE = 45^o$

2) కాదు, ∠SOR సరళకోణం కాదు   4) $160^o, 20^o, 160^o$

5) ∠AOE, ∠COD; ∠AOC, ∠DOE   6) 65^o

అభ్యాసం - 4.4

1) $\angle 1 = 135^o$, $\angle 2 = 45^o$, $\angle 4 = 45^o$, $\angle 5 = 135^o$, $\angle 6 = 45^o$, $\angle 7 = 45^o$, $\angle 8 = 135^o$

2) 65^o 3) $120^o, 75^o$ 4) $20^o, 33^o$; $\angle AEC = 53^o$ 5) అవును

6) $60^o, 80^o, 40^o$ 7) $100^o, 80^o, 80^o$ 8) 360^o

9) AL||EH; BK||DI; CJ||FG

యూనిట్ అభ్యాసం

1) $54^o, 144^o, 324^o$

2) ∠AOB, ∠BOC;   ∠BOC, ∠COD;   ∠COD, ∠DOE;   ∠DOE, ∠EOF

3) 80^o 4) $18^o, 36^o, 54^o, 72^o$

6) నేను అంగీకరించను రెండు అధికకోణాలు మొత్తం 360^0 కంటె తక్కువ.

8) 110º, 70º

9) i) transversal ii) corresponding iii) alternate interior iv) co-interior

10) 45º 11) 40º

4. Lines and angles (Logical venn diagrams)									
Practice questions									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
b	d	b	d	f	e	d	b	g	g
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
d	g	f	h	g	h	g	c	b	g
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
a	f	e	a	f	b	f	g	f	e

CHAPTER - 5

Review Exercise :

2) i) J. D, C ii) P, A, R, B, G, E, A iii) F, H, I

3) X, Y, Z ; $\overline{XY}$, $\overline{YZ}$, $\overline{ZX}$; $\angle X$, $\angle Y$, $\angle Z$

4) i) $\overline{KM}$, ii) $\overline{LM}$, iii) $\angle M$ iv) K

6) Acute angles : 20º, 36º, 47º, 50º, 65º

Obtuse angles : 95º, 102º, 110º, 125º

Right angle : 90º

7) Intersecting points P, Q; concurrent point Q.

Exercise - 5.1

1) fig (i) and fig (vi) are scalene triangles

fig (ii) and fig (v) are equilateral triangles.

fig (iii) and fig (iv) are isosceles triangles.

2) fig (ii) and fig (vi) are acute angle triangles.

fig (iii) and fig (v) are obtuse angle triangles.

fig (i) and fig (iv) are right angle triangles

3) iii) and (v) are scalene triangles

(ii) and (vi) are equilateral triangles

(i) and (iv) are isosceles triangles

8) 110°, 70°

9) i) తిర్యగ్రేఖ ii) అనురూప iii) ఏకాంతర కోణాలు iv) సహ అంతర కోనాలు

10) 45° 11) 40°

4. Lines and angles (Logical venn diagrams)									
Practice questions									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
b	d	b	d	f	e	d	b	g	g
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
d	g	f	h	g	h	g	c	b	g
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
a	f	e	a	f	b	f	g	f	e

అధ్యాయం - 5

పునర్విమర్శ అభ్యాసం:

2) i) J. D, C ii) P, A, R, B, G, E, A iii) F, H, I

3) X, Y, Z ; $\overline{XY}$, $\overline{YZ}$, $\overline{ZX}$; $\angle X$, $\angle Y$, $\angle Z$

4) i) $\overline{KM}$, ii) $\overline{LM}$, iii) $\angle M$ iv) K

6) అల్పకోణాలు : 20°, 36°, 47°, 50°, 65°

అధిక కోణాలు : 95°, 102°, 110°, 125°

లంబకోణం : 90°

7) ఖండన బిందువులు P, Q, మిళిత బిందువు Q,

అభ్యాసం - 5.5

1) పటం (i) మరియు పటం (vi) లు విషమబాహు త్రిభుజాలు

పటం (ii) మరియు పటం (v) లు సమబాహు త్రిభుజాలు

పటం (iii) మరియు పటం (iv) లు సమద్విబాహు త్రిభుజాలు

2) పటం (ii) మరియు పటం (vi) లు అల్పకోణ త్రిభుజాలు

పటం (iii) మరియు పటం (v) లు అధికోణ త్రిభుజాలు

పటం (i) మరియు పటం (iv) లు లంబకోణ త్రిభుజాలు

3) (iii) మరియు (v) లు విషమబాహు త్రిభుజాలు

(ii) మరియు (vi) లు సమబాహు త్రిభుజాలు

(i) మరియు (iv) లు అధికోణ త్రిభుజాలు

4) (i), (iv) and (v) are acute angle triangles

(iii) and (vi) are obtuse angle triangles

(ii) is right angle triangle

5) fig (i) is Obtuse angle triangle and scalene triangle

fig (ii) is right angle triangle and scalene triangle

fig (iii) is obtuse angle triangle and equilateral triangle

Exercise - 5.2

1) b, d and e measurements forms triangles 2) 75^0 3) 65^0

4) $\angle S = 50^0$, $\angle N = 20^0$, $\angle P = 55^0$ 5) ΔCUT $x = 110^0$ in ΔNET $x = 51^0$

6) fig(i) $x = 68^0$ and $y = 52^0$ In fig(ii), $x = 36^0$ and $y = 144^0$

7) 53^0 8) $80^0, 30^0, 70^0$ 9) 50^0 , 50^0 10) i) False ii) True iii) False

11) $40^0, 80^0, 60^0$ 12) 1080^0

Exercise - 5.3

1) $\angle YXP$, $\angle ZYQ$ and $\angle XZR$ 2) $\angle ACD = 133^0$ and $\angle DAR = 120^0$

3) 35^0, 17^0 4) 50^0

5) In fig (i) $x = 100^0$, $y = 145^0$; in fig (ii) $x = 130^0$, $y = 50^0$

Exercise - 5.4

2) i) 3, 5, 6, and 5, 6, 9 groups forms triangles. Why because sum of any two sides is greater than the third side in this group.

ii) 3, 6, 9 does not form a triangle . Why because sum of 3cm and 6cm is not greater than 9cm.

3) 65^0, 4.3 cm. 4) 50^0, 50^0 5) 74^0 , 55^0 6) (i), (iii) is true

Exercise - 5.5

1) i) True

ii) False, orthocentre of right angled triangle lies at the vertex at the right angle

iii) True

iv) True

v) False, The point of concurrence of Perpendicular bisectors of sides is circum centre.

2) PT is median, PS is altitude

3 i) Centroid ii) ortho centre iii) incentre iv) ircumcentre

4) i) 2:1 ii) 2:3 iii) 3:1 iv) 1:2

5) i) 4cm. ii) 8cm. iii) 10 cm. iv) 5cm.

6) Incentre

4) (i), (iv) మరియు (v) లు అల్పకోణ త్రిభుజాలు

(iii) మరియు (vi) లు అధికకోణ త్రిభుజాలు

(ii) లంబకోణ త్రిభుజాలు

5) పటం (i) అధిక కోణ త్రిభుజం మరియు విషమబాహు త్రిభుజం

పటం (ii) లంబకోణ త్రిభుజం మరియు విషమబాహు త్రిభుజం

పటం (iii) అధిక కోణ త్రిభుజం మరియు సమబాహు త్రిభుజం

అభ్యాసం - 5.2

1) b, d మరియు e కొలతల త్రిభుజాన్ని ఏర్పరుస్తాయి. 2) 75^0 3) 65^0

4) $\angle S = 50^0$, $\angle N = 20^0$, $\angle P = 55^0$ 5) ΔCUT $x = 110^0$ in ΔNET $x = 51^0$

6) పటం(i) $x = 68^0$ మరియు $y = 52^0$ పటము (ii)లో, $x = 36^0$ మరియు $y = 144^0$

7) 53^0 8) $80^0, 30^0, 70^0$ 9) $50^0, 50^0$ 10) i) తప్పు ii) ఒప్పు iii) తప్పు

11) $40^0, 80^0, 60^0$ 12) 1080^0

అభ్యాసం - 5.3

1) $\angle YXP$, $\angle ZYQ$ and $\angle XZR$ 2) $\angle ACD = 133^0$ and $\angle DAR = 120^0$

3) $35^0, 17^0$ 4) 50^0

5) పటము (i)లో, $x = 100^0$, $y = 145^0$; పటము (ii)లో $x = 130^0$, $y = 50^0$

అభ్యాసం - 5.4

2) i) 3, 5, 6, మరియు 5, 6, 9 సమూహాల త్రిభుజాలని ఏర్పరుస్తాయి. ఎందుకనగా రెండు భుజాల మొత్తం మూడవ భుజం కంటె ఎక్కువ.

ii) 3 , 6 , 9 త్రిభుజాన్ని ఏర్పరచదు. ఎందుకనగా రెండు భుజాలు 3సెం.మీ, 6సెం.మీల మొత్తం 9కి సమానం అయినది.

3) 65^0, 4.3 cm. 4) 50^0, 50^0 5) 74^0, 55^0 6) (i), (iii) is true

అభ్యాసం - 5.5

1) i) ఒప్పు

ii) తప్పు, లంబకోణ త్రిభుజం యొక్క లంబ కేంద్రం లంబకోణం ఉన్న శీర్షం వద్ద ఉంటుంది

iii) ఒప్పు

iv) ఒప్పు

v) తప్పు, త్రిభుజంలో లంబ సమద్విఖండన రేఖల మిళితబిందువు పరివృత్త కేంద్రం అవుతుంది.

2) PT మధ్యగత రేఖ, PS ఉన్నతి

3 i) గురుత్వకేంద్రం ii) లంబ కేంద్రం iii) అంతర్‌వృత్త కేంద్రము iv) పరివృత్త కేంద్రము

4) i) 2:1 ii) 2:3 iii) 3:1 iv) 1:2

5) i) 4cm. ii) 8cm. iii) 10 cm. iv) 5cm.

6) అంతరవృత్త కేంద్రము

Exercise - 5.6

1) i) AB and DE, BC and EF, CA and FD ii) $\angle A$ and $\angle D$, $\angle B$ and $\angle E$, $\angle C$ and $\angle F$

2) i) figures (iv) and (vi) are correct; ii) figures iii) and v) are not correct

3) i) $\overline{AB} = \overline{FD}$ = 2cm. ; $\overline{BC} = \overline{DE}$ = 3cm. ; $\overline{AC} = \overline{FE}$ = 4cm.; $\Delta ABC \cong \Delta FDE$

ii) $\overline{PQ} = \overline{YZ}$ = 4.5 cm.; $\overline{QP} = \overline{YX}$ = 3.2 cm.; $\overline{PR} = \overline{ZX}$ = 4.8 cm. $\Delta PQR \cong \Delta YZX$

iii) $\overline{AB} = \overline{DC}$ = 3 cm. ; $\overline{AD} = \overline{CB}$ = 5 cm. $\overline{BD} = \overline{DB}$ (Common side) $\Delta ABD \cong \Delta CDB$

iv) $\overline{PQ}=\overline{TR}$; $\overline{PR}=\overline{TQ}$; $\overline{QR} = \overline{RQ}$; $\Delta PQR \cong \Delta TRQ$

4 i) $\overline{XZ}=\overline{KL}$ = 3.5cm ; $\overline{ZY}=\overline{LM}$ = 5cm. ; $\angle KLM = \angle XZY = 45^\circ$; $\Delta KLM \cong \Delta XZY$

ii) $\overline{ED}=\overline{FD}$ = 4.8cm. ; $\overline{DG} = \overline{GD}$ (Common side) ; $\angle EDG = \angle FDG = 42^\circ$; $\Delta EDG \cong \Delta FDG$

iii) $\overline{QR} = \overline{SP}$ = 5cm. ; $\overline{RP} = \overline{PR}$ (Common side) ; $\angle QRP = \angle SPR$; = $\Delta SPR \cong \Delta QRP$

iv) i) $\overline{MN} = \overline{JI}$ = 3cm. ; $\overline{NO} = \overline{IH}$ = 3.8cm. ; $\angle MNO = \angle JIH = 120^\circ$; $\Delta MNO \cong \Delta JIH$

5 i) $\angle X = \angle T = 95^\circ$; $\angle Z = \angle S = 40^\circ$; $\overline{XZ} = \overline{TS}$ = 4cm. ; $\Delta MNO \cong \Delta JIH$

ii) $\angle N = \angle P = 50^\circ$; $\angle NOM = \angle POQ = 75^\circ$; $\overline{NO} = \overline{PO}$ = 4cm. ; $\Delta NOM \cong \Delta POQ$

iii) $\angle F = \angle T = 118^\circ$; $\angle G = \angle R = 26^\circ$; $\overline{FG} = \overline{TR}$ = 5cm. ; $\Delta FGE \cong \Delta TRS$

iv) $\angle SPR = \angle QPR = 50^\circ$; $\angle PRS = \angle PRQ = 45^\circ$; $\overline{PR} = \overline{PR}$; $\Delta SPR \cong \Delta QPR$

6 i) $\overline{SR} = \overline{GE}$ = 4cm. ; $\overline{SQ} = \overline{GF}$ = 3cm. ; $\angle Q = \angle F = 90^\circ$; $\Delta SQR \cong \Delta GFE$

ii) $\overline{BC} = \overline{DF}$ = 4.5cm. ; $\overline{AB} = \overline{ED}$ = 2.8cm. ; $\angle A = \angle E = 90^\circ$; $\Delta ABC \cong \Delta EDF$

iii) $\overline{XY} = \overline{ZX}$ = 4.5cm. ; $\overline{XP} = \overline{XP}$ = 2.8cm. ; $\angle XPY = \angle XPZ = 90^\circ$; $\Delta XPY \cong \Delta XPZ$

iv) $\overline{CA} = \overline{AC}$; $\overline{DC} = \overline{BA}$ = 2.8cm. ; $\angle ADC = \angle ABC$; $\Delta ADC \cong \Delta CBA$

Unit Exercise

1) Only one right angle 2) XY

3) No, it is possible only in acute angle triangle

4) i) 3cm, 7cm, 5cm ii) 3 cm, 9 cm, 11 cm iii) 3cm, 7cm, 9cm

5) i) Right angle triangle : 90^0, 20^0, 70^0 and 90^0, 35^0, 55^0

ii) Obtuse angle triangle : 120^0, 20^0, 40^0 and 100^0, 30^0, 50^0

iii) Acute angle triangle : 55^0, 65^0, 60^0 and 85^0, 55^0, 40^0

6) A line which passes through centroid, incentre, circumcentre and orthocentre

7) 2:1 from the vertex 8) orthocentre, circumcentre

అభ్యాసం - 5.6

1) i) AB మరియు DE, BC మరియు EF, CA మరియు FD ii) $\angle A$ మరియు $\angle D$, $\angle B$ మరియు $\angle E$, $\angle C$ మరియు $\angle F$

2) (i) అవును (ii) కాదు (iii) కాదు (iv) అవును (v) కాదు (vi) అవును

3) i) $\overline{AB} = \overline{FD}$ = 2సెం.మీ. ; $\overline{BC} = \overline{DE}$ = 3సెం.మీ.; $\overline{AC} = \overline{FE}$ = 4సెం.మీ.; $\Delta ABC \cong \Delta FDE$

ii) $\overline{PQ} = \overline{YZ}$ = 4.5సెం.మీ.; $\overline{QP} = \overline{YX}$ = 3.2సెం.మీ.; $\overline{PR} = \overline{ZX}$ = 4.8సెం.మీ., $\Delta PQR \cong \Delta YZX$

iii) $\overline{AB} = \overline{DC}$ = 3 సెం.మీ.; $\overline{AD} = \overline{CB}$ = 5సెం.మీ. $\overline{BD} = \overline{DB}$ (ఉమ్మడి భుజము) $\Delta ABD \cong \Delta CDB$

iv) $\overline{PQ}=\overline{TR}$; $\overline{PR}=\overline{TQ}$; $\overline{QR} = \overline{RQ}$; $\Delta PQR \cong \Delta TRQ$

4 i) $\overline{XZ}=\overline{KL}$ = 3.5సెం.మీ. ; $\overline{ZY}=\overline{LM}$ = 5సెం.మీ. ; $\angle KLM = \angle XZY = 45^o$; $\Delta KLM \cong \Delta XZY$

ii) $\overline{ED}=\overline{FD}$ = 4.8సెం.మీ.; $\overline{DG} = \overline{GD}$ (ఉమ్మడి భుజము) ; $\angle EDG = \angle FDG = 42^o$; $\Delta EDG \cong \Delta FDG$

iii) $\overline{QR} = \overline{SP}$ = 5సెం.మీ. ; $\overline{RP} = \overline{PR}$ (ఉమ్మడి భుజము) ; $\angle QRP = \angle SPR$; = $\Delta SPR \cong \Delta QRP$

iv) i) $\overline{MN} = \overline{JI}$ = 3సెం.మీ. ; $\overline{NO} = \overline{IH}$ = 3.8సెం.మీ.; $\angle MNO = \angle JIH = 120^o$; $\Delta MNO \cong \Delta JIH$

5 i) $\angle X = \angle T = 95^o$; $\angle Z = \angle S = 40^o$; $\overline{XZ} = \overline{TS}$ = 4సెం.మీ. ; $\Delta MNO \cong \Delta JIH$

ii) $\angle N = \angle P = 50^o$; $\angle NOM = \angle POQ = 75^o$; $\overline{NO} = \overline{PO}$ = 4సెం.మీ. ; $\Delta NOM \cong \Delta POQ$

iii) $\angle F = \angle T = 118^o$; $\angle G = \angle R = 26^o$; $\overline{FG} = \overline{TR}$ = 5సెం.మీ. ; $\Delta FGE \cong \Delta TRS$

iv) $\angle SPR = \angle QPR = 50^o$; $\angle PRS = \angle PRQ = 45^o$; $\overline{PR} = \overline{PR}$; $\Delta SPR \cong \Delta QPR$

6 i) $\overline{SR} = \overline{GE}$ = 4సెం.మీ. ; $\overline{SQ} = \overline{GF}$ = 3సెం.మీ. ; $\angle Q = \angle F = 90^o$; $\Delta SQR \cong \Delta GFE$

ii) $\overline{BC} = \overline{DF}$ = సెం.మీ. ; $\overline{AB} = \overline{ED}$ = 2.8సెం.మీ. ; $\angle A = \angle E = 90^o$; $\Delta ABC \cong \Delta EDF$

iii) $\overline{XY} = \overline{ZX}$ = 4.5సెం.మీ. ; $\overline{XP} = \overline{XP}$ = 2.8సెం.మీ. ; $\angle XPY = \angle XPZ = 90^o$; $\Delta XPY \cong \Delta XPZ$

iv) $\overline{CA} = \overline{AC}$; $\overline{DC} = \overline{BA}$ = 2.8సెం.మీ. ; $\angle ADC = \angle ABC$; $\Delta ADC \cong \Delta CBA$

యూనిట్ అభ్యాసం

1) ఒక లంబ కోణం 2) XY

3) కాదు, అల్పకోణ త్రిభుజంలో మాత్రమే ఏర్పడుతుంది

4) i) 3సెం.మీ., 7సెం.మీ., 5సెం.మీ. ii) 3 సెం.మీ., 9 సెం.మీ., 11 సెం.మీ. iii) 3 సెం.మీ., 7సెం.మీ., 9సెం.మీ.

5) i) లంబకోణ త్రిభుజం : 90^0, 20^0, 70^0 మరియు 90^0, 35^0, 55^0

ii) అధిక కోణ త్రిభుజం : 120^0, 20^0, 40^0 మరియు 100^0, 30^0, 50^0

iii) అల్పకోణ త్రిభుజం : 55^0, 65^0, 60^0 మరియు 85^0, 55^0, 40^0

6) గురుత్వకేంద్రం, లంబ కేంద్రం, అంతరకేంద్రం, పరివృత్త కేంద్రంల ద్వారా పోయే రేఖ

7) శీర్షం నుండి 2:1 8) లంబ కేంద్రం, పరివృత్త కేంద్రం

9) orthocentre, circumcentre 10) 62^0, 118^0 11) 72^0, 18^0, 90^0

12) 20^0

13)

	Scalene triangle	Isosceles triangle	Equilateral triangle
Acute triangle	40^0, 60^0, 80^0	50^0, 50^0, 80^0	60^0, 60^0, 60^0
Right triangle	90^0, 40^0, 50^0	90^0, 45^0, 45^0	—
Obtuse triangle	110^0, 40^0, 30^0	100^0, 40^0, 40^0	—

14) i) SAS Congruency $\Delta LNM \cong \Delta PQO$

ii) ASA Congruency $\Delta PAS \cong \Delta RTC$

iii) RHS Congruency $\Delta FGH \cong \Delta IJK$

iv) SSS Congruency $\Delta ABC \cong \Delta MKL$

CHAPTER - 6

Exercise - 6.1

1) i) 7 ii) 15 iii) $\frac{17}{20}$ 2) ₹625

3) 38 4) 7.5 5) $x + 1$

Exercise - 6.2

1) i) 2 ii) B and K iii) No mode 2) 2

3) No mode 4) T , Uni modal data

Exercise - 6.3

1. i) 7 ii) 19 2) 146 3) 7

4) 0.25 5) 7

Exercise - 6.4

1) i) 2016-17 ii) 2015-16 iii) 120

2) Double Bar Graph

3) i) Education ii) food iii) ₹3000 +

4) Pie chart

Unit Exercise

1) 73, 64 Kohli has better average than Rohit 2) 38 and 43 3) 7, 5.5

4) $x = 2$ and the observations are 14, 10, 6, 4, 2 5) Double Bar Graph

6) Pie chart

6. Data handling (Letter Series)

Practice questions

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	d	b	b	c	d	a	b	d	a
11	12	13	14	15					
c	b	A	c	c					

9) లంబ కేంద్రం, పరివృత్త కేంద్రం 10) $62^0, 118^0$ 11) $72^0, 18^0, 90^0$

12) 20^0

13)

	విషమ బాహు త్రిభుజం	సమద్విబాహు త్రిభుజం	సమబాహు త్రిభుజం
అల్పకోణ త్రిభుజం	$40^0, 60^0, 80^0$	$50^0, 50^0, 80^0$	$60^0, 60^0, 60^0$
లంబకోణ త్రిభుజం	$90^0, 40^0, 50^0$	$90^0, 45^0, 45^0$	—
అధిక కోణ త్రిభుజం	$110^0, 40^0, 30^0$	$100^0, 40^0, 40^0$	—

14) i) భు.కో.భు. సర్వసమానత్వము $\Delta LNM \cong \Delta PQO$

ii) కో.భు.కో సర్వసమానత్వము $\Delta PAS \cong \Delta RTC$

iii) లం.క.భు. సర్వసమానత్వము $\Delta FGH \cong \Delta IJK$

iv) భు.భు.భు. సర్వసమానత్వము $\Delta ABC \cong \Delta MKL$

అధ్యాయం - 6

అభ్యాసం - 6.1

1) i) 7 ii) 15 iii) $\frac{17}{20}$ 2) ₹625

3) 38 4) 7.5 5) $x + 1$

అభ్యాసం - 6.2

1) i) 2 ii) B మరియు K iii) బహుళకం లేదు 2) 2

3) బహుళకం లేదు 4) T , ఏక బహుళకం దత్తాంశం

అభ్యాసం - 6.3

1) i) 7 ii) 19 2) 146 3) 7

4) 0.25 5) 7

అభ్యాసం - 6.4

1) i) 2016-17 ii) 2015-16 iii) 120

2) రెండు కమ్మీల రేఖ చిత్రం

3) i) చదువు ii) ఆహారం iii) ₹3000 +

4) పై చిత్రం

యూనిట్ అభ్యాసం

1) 73, 64 రోహిత్ కంటే కోహ్లి సరాసరి ఎక్కువ 2) 38 మరియు 43 3) 7, 5.5

4) $x = 2$ మరియు పరిశీలనలు 14, 10, 6, 4, 2 5) రెండు కమ్మీల రేఖ చిత్రం

6) పై చిత్రం

6. Data handling (Letter Series)

Practice questions

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	d	b	b	c	d	a	b	d	a
11	12	13	14	15					
c	b	A	c	c					